Livret de révision de Mathématiques de la 1ère spécialité à l'option maths complémentaire en terminale

Des bases solides en mathématiques sont indispensables pour réussir en terminale spécialité mathématiques

Les exercices de ce livret sont inspirés de ceux du livret de travail du lycée Henri IV Paris 5ème et de ceux du livret liaison du Lycée Louis Bascan (78).

Ce livret propose des exercices à traiter avant la rentrée pour envisager plus sereinement l'option maths complémentaire en terminale.

Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux et de manière autonome.
Il est préférable de le commencer au moins 15 jours avant la rentrée.
Une correction pourra être consultée sur pearltrees ou sur le site du lycée.

Ce livret d'exercices reprend les attendus de fin de 1ère et propose **des exercices d'entraînement, des cartes mentales, pour aborder l'année de terminale dans de bonnes conditions.**

Ce livret est à conserver pour la classe de terminale. Il pourra être un outil vers lequel vous pourrez vous reporter autant que besoin.

En attendant : très bonnes vacances !

Inégalités

Comment encadrer, majorer ou minorer ?

Cas particuliers

- La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

Pour tout x et y de même signe $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

- La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$

$$\forall x, y \in]-\infty; 0[, x < y < 0 \overset{f \swarrow}{\Longrightarrow} x^2 > y^2$$

$$\forall x, y \in]0; +\infty[, 0 < x < y \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} x^2 < y^2$$

- La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

$$\forall x, y \in [0; +\infty[, 0 < x < y \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

Utilisation des variations d'une fonction sur un intervalle I

- f est croissante sur I :

$$\forall x, y \in I, x < y \overset{f \nearrow}{\Longrightarrow} f(x) < f(y)$$

- f est décroissante sur I :

$$\forall x, y \in I, x < y \overset{f \swarrow}{\Longrightarrow} f(x) > f(y)$$

Utilisation des extremums d'une fonction sur un intervalle I

- f admet un minimum en a sur I :

$$\forall x \in I, f(a) < f(x)$$

- f admet un maximum en a sur I :

$$\forall x \in I, f(x) < f(a)$$

-

Travail sur les inégalités : Somme et produit

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités :

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités si les termes sont positifs :

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow a \times c < b \times d$$

Travail sur les inégalités :

- **Multiplication par un réel k**

$k > 0, \quad x < y \Leftrightarrow k \times x < k \times y$

$k < 0, \quad x < y \Leftrightarrow k \times x > k \times y$

- **Addition d'un réel k**

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Rightarrow x + k < y + k$

Encadrement de la différence et du quotient

- Encadrer $(x - y)$: on encadre $-y$, puis on somme :

$$\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \overset{somme}{\Longrightarrow} -1 < x - y < 7$$

- Encadrer $\frac{x}{y}$: on vérifie que x et y ont même signe, on encadre l'inverse $\frac{1}{y}$ puis on multiplie.

$$\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \overset{inverse}{\Longrightarrow} \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3} \end{cases} \overset{produit}{\Longrightarrow} 2 < x \times \frac{1}{y} < 3$$

Méthode importante

Pour comparer les quantités A et B, il est plus facile d'étudier le signe de $A - B$

Montrons que : si $x < 1$ alors $\frac{x-8}{2x-9} < 1$

- On calcule $\frac{x-8}{2x-9} - 1 = \frac{1-x}{2x-9}$
- On étudie le signe du quotient
- On conclut que $\frac{1-x}{2x-9} < 0$
- Donc $\frac{x-8}{2x-9} < 1$

Forme canonique du trinôme f

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad et \ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Forme canonique du trinôme f

Complétion du carré

Pour déterminer la forme canonique :
On met a en facteur.
• On considère les deux premiers termes comme le début d'un carré parfait.
• On ajoute puis on retranche le carré introduit.
• On réduit ensuite l'expression.

Signe du trinôme f

* **$\Delta > 0$: le trinôme est du signe de a « à l'extérieur » des racines**

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	0	$-a$	0	a	

* **$\Delta = 0$: Le trinôme est du signe de a et s'annule en $\alpha = x_0$**
* **$\Delta < 0$: le trinôme est du signe de a**

Variations du trinôme f

$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

$a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

Trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

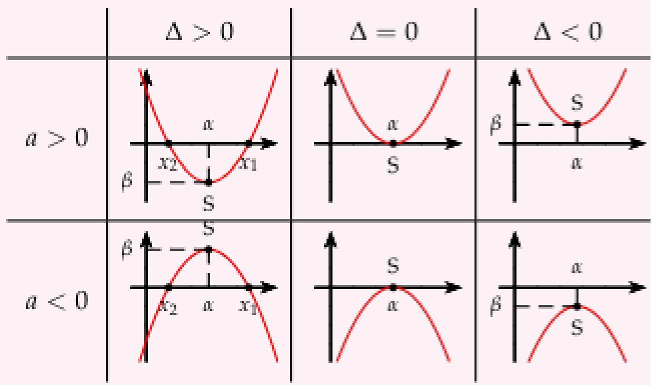
avec a, b, c des réels et $a \neq 0$

Forme factorisée du trinôme f

* $\Delta > 0 : \ f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
* $\Delta = 0 : \ f(x) = a(x-x_0)^2$
* $\Delta < 0 : f(x) \ n'est \ pas \ factorisable$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Représentations



Racines du polynôme $f(x)$ ou solutions de $f(x) = 0$

* $\Delta > 0 : f(x) \ a \ deux \ racines: \boldsymbol{x_1} = \dfrac{\boldsymbol{-b+\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}} \ et \ \boldsymbol{x_2} = \dfrac{\boldsymbol{-b-\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}$
* $\Delta = 0: f(x) \ a \ une \ racine \ double \ \boldsymbol{x_0} = \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$
* $\Delta < 0: f(x) \ n'a \ pas \ de \ racine \ réelle$

Somme et produit des racines de $f(x)$

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}} \ et \ \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = a(x^2 - Sx + P)}$$

Exercice 1 : On veut déterminer un encadrement de l'expression pour $x \in [-1; 2]$

$$A = \frac{1}{5 - x^2}$$

1) Justifier les étapes suivantes :

$-1 \leq x \leq 2$ donc $\ldots \leq x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq -x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq 5 - x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq \frac{1}{5-x^2} \leq \cdots$ car ………………

2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5-x^2}$, puis étudier ses variations et retrouver l'encadrement obtenu à la question précédente.

Exercice 2 : On considère l'expression suivante :

$$A = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{20^2}$$

1) Soit k un entier tel que $k \geq 2$.

Justifier que l'on a : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ et démontrer l'égalité : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

2) Soit $B = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k(k-1)}$. Montrer que $B = 1 - \frac{1}{20}$

3) En déduire que $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{20}$

4) Elaborer un algorithme avec une boucle « Pour » qui permet de calculer $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2}$ et le programmer sur la calculatrice ou sur Python. Donner la valeur affichée en sortie avec toutes les décimales obtenues. Vérifier le résultat trouvé au 3).

5) On considère maintenant l'expression suivante définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

Prouver en utilisant une démarche analogue, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Exercice 3 : Calculs de base

- Développement : Pour chacun des polynômes suivants, déterminer sa forme développée.

1) $P(x) = (x + 1)^3$
2) $Q(x) = (x^2 + 2)^2 - 3$
3) $R(x) = (x - 3)(6x^2 + x + 1) - (3x^2 - 1)(2x + 1)$

- Factorisation : Factoriser chacun des polynômes suivants.

1) $Q(x) = 9x^4 - 36$
2) $R(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x$
3) $S(x) = x^3 + 3x^2 - 81x + 77$
4) $T(x) = (x^2 + 8x + 16)(x^2 610x + 25)$
5) $U(x) = x^3 - 9x^2 + 2x + 48$
6) $V(x) = x^2 - 6x + 9 + x^2(x - 3)$

Exercice 4 : Simplification numérique

« Simplifier » l'écriture des nombres suivants (entre autres, écrire sous la forme d'une seule fraction, au plus, sans racine carrée au dénominateur).

$A = 3 \times \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}$; $B = \left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$; $C = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2$; $D = \dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2-\sqrt{3}}$;

Exercice 5 : Simplification algébrique

« Simplifier » l'écriture des expressions algébriques suivantes (entre autres, écrire sous la forme d'une seule fraction, au plus, sans racine carrée au dénominateur) :

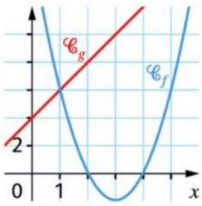
$A = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$; $B = \dfrac{7}{x^2+3} - 1$; $C = 2x - 1 + \dfrac{3x}{2x-1}$; $D = \dfrac{3}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$

Exercice 6 : Tableau de signes

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

$A(x) = \dfrac{7}{x^2+3} - 1$; $C(x) = \dfrac{2x-1}{2x^2-1} - 3$

Exercice 7 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et $g(x) = 2x + 4$



Leurs représentations graphiques C_f et C_g sont données ci-contre.

1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec les axes du repère.

2) Justifier que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2x^2 - 14x + 12$, puis déterminer la forme factorisée de $f(x) - g(x)$.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de C_f et C_g.

4) Déterminer l'intervalle sur lequel C_f est en-dessous de C_g.

Exercice 8 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{3}{x}$; $b)\ x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$; $c)\ x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$d)\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2} < 0$

Exercice 9 :

1) f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = (2x+1)(ax^2+bx+c)$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) On considère la fonction P définie sur R par $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$.

c) Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

3) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(3) = 14$ et $P(1) = P\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

Exercice 10 :

Soit m un réel et (E_m) l'équation d'inconnue x :

$$(E_m) : 2x^2 + (3m+1)x - m(m-1) = 0$$

1) Exprimer Δ_m, discriminant de (E_m), en fonction de m.

2) Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle au moins une solution ?

3) Exprimer P_m, produit des solutions de (E_m), en fonction de m.

4) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles -2 est solution de (E_m) ?

Si oui, résoudre chacune des équations obtenues.

Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :
- Un premier terme : u_0 ou u_p
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec r raison de (u_n).

(ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)

2) Une suite **est** arithmétique de raison r ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r} \text{ ou } \boldsymbol{u_n = u_p + (n - p) \times r}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme+dernier terme}}{2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

$(n - p + 1)$ correspond aux nombres de termes de u_p à u_n

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :
- Un premier terme : v_0 ou v_p
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$ avec q raison de (v_n).

(ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)

2) Une suite **est** géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} \text{ ou } \boldsymbol{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Suites

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n$$

- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls. On montre par exemple que :

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Pour montrer qu'une suite est arithmétique

On montre que la différence des deux termes consécutifs, $u_{n+1} - u_n$ est constante et vaut r

Pour montrer qu'une suite est géométrique

- On calcule v_{n+1}
- On factorise v_{n+1} pour faire apparaître, le terme $q \times v_n$

Pour démontrer la monotonie d'une suite (u_n) :

- On calcule $u_{n+1} - u_n$
- On factorise si besoin
- On détermine le signe de cette différence

Variations d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.
- La suite (u_n) est dite croissante si pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est dite constante si pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n$

Somme des termes d'une suite géométrique

- Somme des n premières puissances de q :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$(n - p + 1)$ correspond aux nombres de termes de v_p à v_n

Exercice 11 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$

1) Calculer, à la main, les quatre premiers termes de chaque suite.
2) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.
4) Déterminer le huitième terme de la suite (u_n).

Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \neq -\frac{2}{3}$ et $u_n \neq 0$

On considère alors la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

1) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2) a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de n.
   b) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \neq 1$
   c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{3n+2}$
3) Étudier les variations de la suite (u_n).
4) a) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $u_n < 0{,}01$.
b) Un des trois algorithmes ci-dessous permet de retrouver ce résultat.
   Le retrouver en justifiant votre réponse.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$N \longleftarrow 0$ $U \longleftarrow 1$ Tant que $U < 0{,}01$ $\quad N \longleftarrow N+1$ $\quad U \longleftarrow \frac{2}{2+3N}$ Fin Tant que Afficher N	$N \longleftarrow 0$ $U \longleftarrow 1$ Tant que $U \geqslant 0{,}01$ $\quad N \longleftarrow N+1$ $\quad U \longleftarrow \frac{2}{2+3N}$ Fin Tant que Afficher N	$N \longleftarrow 0$ $U \longleftarrow 0{,}4$ Tant que $U \geqslant 0{,}01$ $\quad N \longleftarrow N+1$ $\quad U \longleftarrow \frac{2}{2+3N}$ Fin Tant que Afficher N

Exercice 13 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$

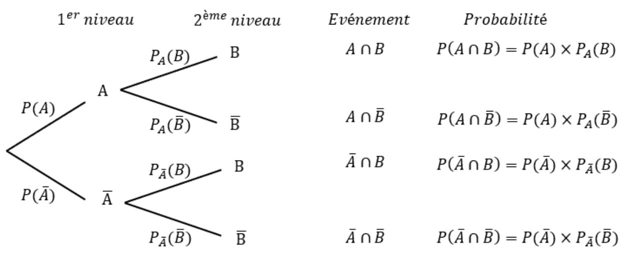
1) Calculer u_1, u_2, u_3.
2) Soit a un réel et (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Déterminer la valeur de a pour que la suite (v_n) soit géométrique. Donner alors ses éléments caractéristiques.
3) Dans la suite de l'exercice, on pose $v_n = u_n - 5$. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
4) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5) Pour tout n entier naturel, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$
   Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ?
7) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n

Exercice 14 :

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$
   a) Calculer v_0.
   b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   d) Exprimer v_n en fonction de n.
3) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$
   a) Calculer w_0.
   b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n + 2$
   d) Exprimer w_n en fonction de n.
4) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

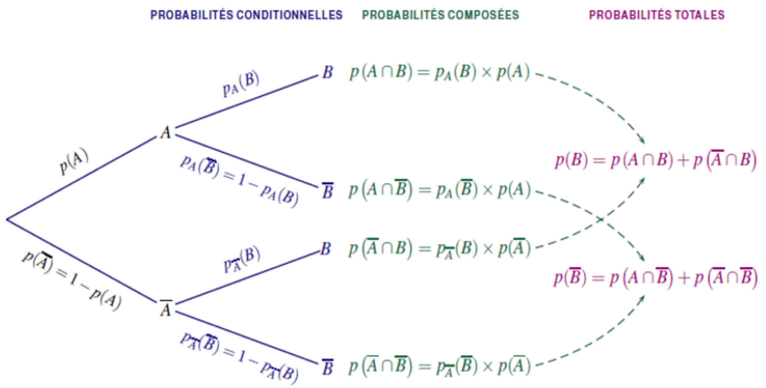
Arbres pondérés :



Chaque branche de l'arbre est affectée d'un poids qui est une probabilité.

- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Le poids d'une branche du 1er niveau est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
- Le poids d'une branche du 2ème niveau est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent. Par exemple, le chemin dont l'extrémité est B représente l'évènement $A \cap B$
- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1. (Règle de la somme)
- La probabilité d'un évènement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin. (Règle du produit)

Schéma récapitulatif



Les probabilités conditionnelles

Propriété :

Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
Si $P(B) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Définition :

La probabilité de B sachant A avec $P(A) \neq 0$

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Tableaux :

Cette méthode est à utiliser lorsque l'énoncé donne la valeur des probabilités des intersections des événements.

	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Total	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Attention : les probabilités conditionnelles n'apparaissent pas dans les tableaux, il faut les calculer.

Propriétés :

- $0 \leq P_A(B) \leq 1$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Indépendance :

A et B sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

A et B indépendants si et seulement si $\boldsymbol{P(A) \neq 0}$ **et** $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$

Propriétés : probabilités totales

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une partition de Ω (ou un système complet d'évènements)

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$

$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n$$

- Elle peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.
- Lorsque les valeurs prises par X représentent les gains d'un jeu, alors $E(X)$ représente le **gain moyen** par partie :
  - Si $E(X) > 0$ alors le jeu est **favorable** au joueur.
  - Si $E(X) < 0$ alors le jeu est **défavorable** au joueur.
  - Si $E(X) = 0$ alors le jeu est **équitable**.

Définition :

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$

On associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire

Les variables aléatoires

Loi de probabilité :

Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur a_i (avec $1 \leq i \leq n$), la probabilité de l'événement $\{X = a_i\}$, notée $P(X = a_i) = p_i$

Elle est souvent résumée dans un tableau :

a_i	a_1	a_2	...	a_n
$P(X = a_i)$	$P(X = a_1)$	$P(X = a_2)$	...	$P(X = a_n)$

Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - E(X))^2 p_i = (a_1 - E(X))^2 p_1 + (a_2 - E(X))^2 p_2 + \ \dots + (a_n - E(X))^2 p_n$$

Ecart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart type est un paramètre de dispersion :

- Plus l'écart type est grand, plus les valeurs prises par X vont être dispersées autour de l'espérance. Le jeu est alors plus risqué.
- Plus l'écart type est petit, plus les valeurs prises par X vont être resserrées autour de l'espérance. Le jeu est alors moins risqué.

Exercice 15 :
En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 48% affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. On suppose qu'il n'y a pas de vote nul ni de vote blanc.
Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :
A l'événement : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A »,
B l'événement : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » et
V l'événement : « la personne interrogée dit la vérité ».
1) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
2) a) Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité arrondie à 10^{-3} près qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est 0,536.

Exercice 16 :
On sait que 1 % d'une population est atteinte d'une certaine maladie orpheline.
On dispose de test de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :
• si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90 % des cas.
• si la personne n'est pas atteinte par cette maladie, alors le test est néanmoins positif dans 5 % des cas.
On choisit une personne au hasard. On note :
• M l'événement : « La personne est malade. ».
• T l'événement : « Le test est positif. ».
1) Traduire les hypothèses en termes de probabilités.
2) a) Calculer $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$
b) Calculer $P(T)$.
3) Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
4) Quelle est la probabilité qu'une personne ne soit pas atteinte par cette maladie sachant que son test est positif ?
5) Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte par cette maladie sachant que son test est négatif ?

Exercice 17 :
Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner ou de perdre la première partie.
On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6, et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7.
On note, pour n entier naturel non nul :
G_n l'événement : "Juliette gagne la n-ième partie",
P_n l'événement : "Juliette perd la n-ième partie".

Partie A
1) Déterminer les probabilités $P(G_1), P_{G_1}(G_2)$ et $P_{P_1}(G_2)$. En déduire la probabilité $P(G_2)$.
2) Calculer $P(P_2)$.

Partie B
On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = P(G_n)$ et $y_n = P(P_n)$.
1) Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités : $P_{G_n}(P_{n+1})$ et $P_{P_n}(G_{n+1})$.
2) Montrer que pour tout n entier naturel non nul :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}7y_n \end{cases}$$
3) Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.
a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.
b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
4) Déduire les expressions de x_n et de y_n en fonction de n.

Exercice 18 :

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On note V l'événement « la boule tirée est verte ».
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A :
On tire successivement deux boules en remettant la première boule dans l'urne après le premier tirage.
1) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2) Déterminer l'espérance mathématique de X.
3) Un joueur mise 3€. Il gagne 2€ par boule verte tirée. On note Y la variable aléatoire égale au bénéfice du joueur.
   a) Exprimer Y en fonction de X.
   b) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X)$. En déduire la valeur de $E(Y)$.
      Le jeu est-il favorable au joueur ?
   c) Quel devrait être le montant gagné pour chaque boule verte pour que le jeu soit équitable ?

Partie B :
On tire maintenant simultanément deux boules dans l'urne. On assimile alors ce tirage à un tirage de deux boules sans remise.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

Partie C :
On tire une boule. Si on obtient une verte, on arrête ; sinon on tire une autre boule parmi les restantes. On recommence ainsi, tant qu'on n'obtient pas une verte.
On note A la variable aléatoire qui associe le rang d'arrivée de la première boule verte.
Déterminer la loi de probabilité de A.

Dérivation
Point de vue local : dérivabilité en un réel a

Taux d'accroissement de la fonction f entre les réels a et $a+h$ est le quotient

$$\boldsymbol{\tau(h)} = \frac{\boldsymbol{f(a+h) - f(a)}}{\boldsymbol{h}}$$

La limite de $\boldsymbol{\tau(h)}$ est réelle lorsque h tend vers 0

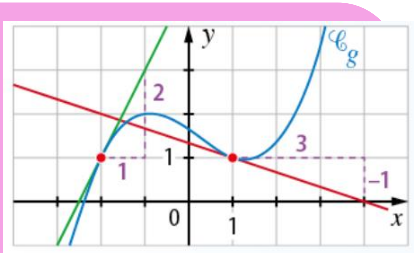
La fonction $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en** $\boldsymbol{a}$ et **le nombre dérivé de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$ est $\boldsymbol{f'(a)}$

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a dont **le coefficient directeur ou la pente est** $\boldsymbol{f'(a)}$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

$g'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2.
On cherche donc la pente de la droite verte.
On choisit deux points de la droite verte :
on avance de deux unités verticalement
puis d'une unité vers la droite horizontalement.
Ainsi $g'(-2) = \frac{2}{1} = 2$



L'équation réduite de la tangente est : $y = g'(a)(x-a) + g(a)$

$$y = 2(x-(-2)) + 1 = 2(x+2) + 1 = 2x + 5$$

La limite de $\boldsymbol{\tau(h)}$ est infinie ou n'existe pas lorsque h tend vers 0

La fonction $\boldsymbol{f}$ **n'est pas dérivable en** $\boldsymbol{a}$

Dérivation
Point de vue global : dérivabilité sur un intervalle I

Si la fonction $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en tout réel** $\boldsymbol{a}$ **de l'intervalle** $\boldsymbol{I}$ **alors** $\boldsymbol{f}$ **est dérivable sur** $\boldsymbol{I}$

On appelle **fonction dérivée de** f , notée f' :

$$I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Calcul de la fonction dérivée de f

Si f est une fonction de référence

définie par	dérivable sur	a pour dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ si $n \leq -1$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si f est une somme, un produit, un quotient de fonction de référence ou une composée avec une fonction affine

$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)$

Pour établir une inégalité du type $f(x) \geq k$ (avec $k \in \mathbb{R}$),

On peut étudier les variations de la fonction f
et observer ensuite ses extremums locaux.

Pour étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g,
il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ en étudiant les variations de la fonction $f - g$ puis en étudiant le signe de la fonction $f - g$.

Pour résoudre un problème d'optimisation,

il faut exprimer la grandeur à optimiser (une aire, un volume, des coûts, …) comme une fonction à une seule variable puis étudier les variations de cette fonction et enfin déterminer ses extremums locaux

Pourquoi ?

Application à la dérivation
Etudier les variations de f

Comment ?

Méthode :

1. On commence par déterminer si la fonction est dérivable sur l'intervalle I.
2. On calcule l'expression de $f'(x)$
3. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de $\boldsymbol{x \in I}$

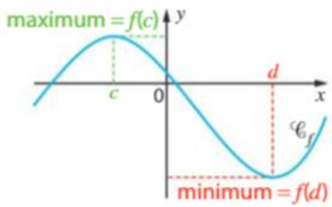
Si $f'(x) = 0$ pour $x = c$ en changeant de signe
Alors f admet un extremum local en c

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	

$f(c)$ est un **minimum local**.

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	

$f(c)$ est un **maximum local**.



Si f admet un extremum local en c
Alors $f'(c) = 0$

Si $f'(x) = 0$
Alors f est constante sur I

Si $f'(x) \geq 0$
Alors f est croissante sur I

Si $f'(x) \leq 0$
Alors f est décroissante sur I

Propriétés

Pour tous réels x, y

- $\boldsymbol{e^0 = 1}$
- $e^1 = e$
- $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{n\times x}$ avec $n \in \mathbb{N}$

- $\boldsymbol{e^x > 0}$

Définition

f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Fonction exponentielle

Dérivation

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$

$\boldsymbol{f(x) = e^{ax+b}}$

avec a et b réels

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\boldsymbol{f'(x) = a \times e^{ax+b}}$

Pour résoudre des équations

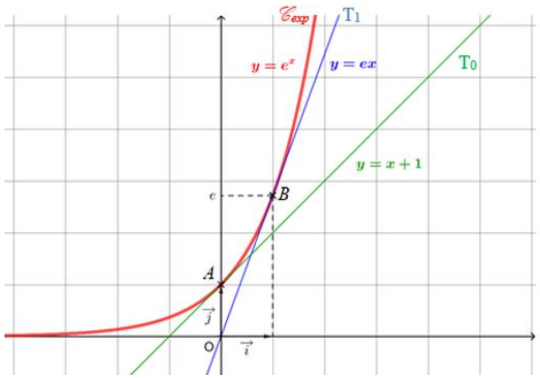
Pour tous réels a, b

$\boldsymbol{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$

Pour résoudre des inéquations

Pour tous réels a, b

$\boldsymbol{e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b}$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$		1	e	

Exercice 19 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{-x^3+5x}{x^2+3}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de votre calculatrice.

a) Quelle propriété géométrique pouvez-vous conjecturer ?

b) Prouver cette conjecture.

2) Pour tout x réel, calculer $f'(x)$ et montrer que

$$f'(x) = \frac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$$

3) Établir le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

4) On note $\mathcal{T}_0$ la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

a) Vérifier que l'équation réduite de $\mathcal{T}_0$ est $y = \frac{5}{3}x$

b) Déterminer le signe de l'expression $f(x) - \frac{5}{3}x$ suivant les valeurs de x.

c) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}_0$.

5) a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x réel, on ait :

$$f(x) = ax + \frac{bx}{x^2+3}$$

b) On considère à présent la droite $\mathcal{D}: y = -x$

Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

c) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats à 10^{-4} près)

x	10	100	1 000	10 000
$\frac{8x}{x^2+3}$				

Quelle conjecture graphique peut-on faire au vu de ces résultats ?

On dit que la droite $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

7) En utilisant tous les renseignements obtenus aux questions précédentes, construire avec précision $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{D}$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (Ne pas oublier les tangentes horizontales ...)

Exercice 20 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Donner $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ son nombre dérivé en 0.

3) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0.

4) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer sa dérivée f'.

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 21 :

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$

$$a)\ f(x) = xe^x + 3x - 1 \quad ; \quad b)\ k(x) = (2x+1)e^{-2x}$$

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a)\ e^{2x} = 1 \quad ; \quad b)\ \frac{e^{3x-1}}{e^{4x+4}} = e^{-x+2} \quad ; \quad c)\ e^{x^2} = e^{x-3} \quad ; \quad e)\ xe^{2x+1} = x \quad ; \quad f)\ e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$c)\ e^{-x^2-3x+5} > e$$

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + xe^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation dans un repère du plan.

1) Soit g la fonction définie par $g(x) = e^x - x + 1$

   a) On note g' la dérivée de g. Exprimer, pour tout x réel, $g'(x)$.

   b) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) a) Démontrer que, pour tout x réel, on a : $f'(x) = e^{-x}g(x)$

   b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.