Livret de révision de Mathématiques

de la 2ème à la 1ère spécialité maths

En septembre, vous entrerez au lycée en classe de première avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Vous aurez 4h de mathématiques par semaine.

Le programme repose sur l'ensemble des notions vues en seconde, les approfondit et en développe de nouvelles.

Des bases solides en mathématiques sont indispensables pour réussir dans l'Enseignement Supérieur dans beaucoup de domaines scientifiques ou économiques.

Les exercices seront parfois plus abstraits ; savoir s'imposer de comprendre et mémoriser les méthodes, de refaire les exercices chez soi après avoir assimilé le cours est une des clés de la réussite, à condition d'être particulièrement concentré et actif en classe.

Il est fortement inspiré du livret de travail du lycée Henri IV Paris 5ème, des travaux de l'IREM de Clermont Ferrand - Groupe Aurillac-Lycée et du livret de liaison du Lycée Louis Bascan (78).

Il propose des exercices à traiter avant la rentrée pour envisager plus sereinement l'année de première, enseignement de spécialité en mathématiques. Certains sont d'un niveau difficile, ils sont reconnaissables aux astérisques *,**
Ce travail sera d'autant plus efficace si vous le faites avec sérieux et de manière autonome. Il est préférable de le commencer au moins 15 jours avant la rentrée.
Une correction sera déposée sur pearltrees ou sur le site du lycée à la fin du mois d'août.

Ce livret d'exercices reprend une partie des attendus de fin de 2nde et propose **des exercices d'entraînement, des cartes mentales, pour aborder l'année de première dans de bonnes conditions.**

Ce livret est à conserver pour la classe de première. Il pourra être un outil vers lequel vous pourrez vous reporter autant que besoin.

En attendant : très bonnes vacances !

Mme Duchaillut

Nombres premiers

Définition : Un nombre entier naturel est un nombre premier s'il n'admet que deux diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même.
Exemples :2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19;…

Diviseurs et multiples

a est un multiple de b
b est un diviseur de a
a est divisible *par* b
s'il existe un entier k tel que $a = k \times b$

Exemple : 42 est un multiple de 7 car $42 = 7 \times 6$

Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 si et seulement si le chiffre des unités est : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
Un nombre entier est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités est : 0 ou 5.
Un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Un nombre entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Décomposition : Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit comme produit de facteurs de nombres premiers. Cette décomposition est unique.
Exemple : $28 = 2 \times 2 \times 7$; $45 = 3 \times 3 \times 5$

inclus

Les entiers naturels : $\mathbb{N}$
0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;…

Les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$
… ; -3 ; -2 ; -1 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; …

Les ensembles de nombres

Nombres pairs et impairs

Définitions : Un entier a est un nombre pair s'il existe un entier k tel que $a = 2 \times k$
Un entier a est un nombre impair s'il existe un entier k tel que $a = 2 \times k + 1$

Propriété : le carré d'un nombre impair est impair.

Les nombres décimaux : $\mathbb{D}$
-10 ;0 ; 2 ; 2,56 ; -3.65 ; $\frac{2}{10^7}$; …

inclus

Un nombre décimal s'écrit $\frac{a}{10^n}$ avec a un entier et n un entier naturel.
Il admet aussi une partie décimale qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres

inclus

Les nombres rationnels :$\mathbb{Q}$
-18 ;22 ;0 ;2,56 ; -3,6 ; $\frac{1}{3}$

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul

inclus

Les nombres irrationnels : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
π ; $\sqrt{2}$; $-\pi$; $-\sqrt{2}$; ...

inclus

Les nombres réels : $\mathbb{R}$
Tous les nombres connus en 2nde

Un nombre décimal avec une partie décimale périodique est un nombre rationnel :
1,256256256256…

Appartient ou est inclus ?
$\in$; $\notin$: s'utilisent pour exprimer **qu'un nombre** appartient ou non à un ensemble.
$\subset$; $\not\subset$: s'utilisent pour exprimer **qu'un ensemble** est inclus ou non dans un ensemble.
Un ensemble de plusieurs nombres s'écrit entre accolades : { }

$\{2; 23; 56\} \subset \mathbb{N}$; $23 \in \mathbb{N}$

Valeur absolue de x : $|x|$
C'est la distance entre x et 0.
Elle est positive.
Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$
et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$
$|x - a|$ est la distance entre x et a

Vocabulaire

$\dfrac{a}{\color{red}{b}}$ a ↙ *numérateur*, b ↖ *dénominateur* $\quad b \neq 0$

$\dfrac{a}{\color{red}{b}}$ est irréductible si le seul diviseur commun à a et b est 1

Inverse d'un nombre

L'inverse d'un nombre a non nul est $\frac{1}{a}$

L'inverse de $\frac{a}{\boldsymbol{b}}$ est $\frac{b}{\boldsymbol{a}}$

Prendre une fraction d'une quantité

On multiplie la fraction par cette quantité :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

Fractions

Egalité

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *équivaut à* $a \times d = b \times c$

Produit

On multiplie :
Les numérateurs entre eux
et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Somme et différence

On met les fractions sur le même dénominateur
On additionne ou soustrait les numérateurs
On conserve le dénominateur commun

$$\frac{a}{\boldsymbol{b}} + \frac{c}{\boldsymbol{d}} = \frac{a \times d}{\boldsymbol{b \times d}} + \frac{c \times b}{\boldsymbol{b \times d}} = \frac{a \times d + c \times b}{\boldsymbol{b \times d}}$$

$$\frac{a}{\boldsymbol{b}} - \frac{c}{\boldsymbol{d}} = \frac{a \times d}{\boldsymbol{b \times d}} - \frac{c \times b}{\boldsymbol{b \times d}} = \frac{a \times d - c \times b}{\boldsymbol{b \times d}}$$

Quotient

Diviser par un nombre différent de zéro revient à multiplier par l'inverse de ce nombre

$$\frac{a}{b} \div \frac{\color{red}{c}}{\color{red}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{\color{red}{d}}{\color{red}{c}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

<u>Exercice 1</u> : Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{1}{6} - \frac{5}{9} + \frac{1}{4} \qquad B = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + 3\left(\frac{4}{5} - \frac{5}{6}\right) \quad et \quad C = \frac{\frac{3}{2} - \frac{7}{5}}{\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}} + 1$$

Puissances

Vocabulaire

a est un nombre relatif et
n est un **entier positif** **non nul**.
a^n est **une puissance du nombre a**
n est appelé **l'exposant**

n est un entier positif non nul.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$
- $si\ a \neq 0, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}}$
- Par convention $a^0 = 1$, avec $a \neq 0$

Ecriture scientifique

$\boldsymbol{a \times 10^p\ avec\ 1 \leq a < 10}$
et p un nombre entier relatif
p est l'ordre de grandeur

Cette notation permet de comparer plus facilement des grandeurs ayant même unité

Puissance d'un même nombre

n et m sont deux entiers relatifs non nuls

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Puissance d'un même exposant

n et m sont deux entiers relatifs non nuls

- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Somme de puissances

On calcule chaque terme de la somme !

$5 \times 10^2 + 3 \times 10^{-2} = 500 + 0{,}03 = 500{,}03$

Attention aux parenthèses !

- $\boldsymbol{(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25}$ **et** $\boldsymbol{-5^2 = -5 \times 5 = -25}$
- $\boldsymbol{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}}$ **et** $\boldsymbol{\dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}}$
- $\boldsymbol{(2+1)^2 = 3^2 = 9}$ **et** $\boldsymbol{2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5}$

Exercice 2 : Calculer sans calculatrice.

$$A = \frac{5^{27} - 5^{29}}{5^{28}} \quad ; \quad B = \frac{2^5 \times 4^{-5}}{8} \quad ; \quad C = \frac{3^{-6} \times 5^5}{(5^2)^3 \times 3^{-5}} \quad ; D = \frac{8^2 \times 9^{-5}}{3^{-11} \times 2^8} \quad ; \quad E = \frac{3^{2023} + 3^{2023} + 3^{2023}}{3^{2023}}$$

Les racines carrées

Définition

Soit a un nombre positif. La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est le seul nombre positif dont le carré est égal à a,
c'est-à-dire tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$; $\sqrt{144} = 12$ car $12^2 = 144$

Pour $x \geq 0$, $\sqrt{4x^2} = 2x$ car $(2x)^2 = 2x \times 2x = 4x^2$

Aucun nombre n'a pour carré un nombre négatif. Ainsi écrire « racine carrée de -9 » n'a pas de sens !!

Résolutions d'équations

a est un nombre réel

- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution : 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution

$x^2 = 7 \Leftrightarrow x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$; $x^2 = -8$ n'a pas de solution

Opérations

Produit

Pour tous nombres a et b **positifs ou nuls**, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

Quotient

Pour tous nombres a et b **positifs**,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$$

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{21}{27}} = \sqrt{\frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Somme

ATTENTION :

$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ sauf si a ou b est nul

Il faut effectuer les calculs sous le radical $\sqrt{\ }$ avant de calculer la racine carrée.

$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

On constate donc que $\sqrt{9 + 16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Simplifications d'écritures

On préfère écrire une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a un nombre entier **positif** et b entier **positif** le plus petit possible.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{50} + 6\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = (5 + 6) \times \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$$

On préfère écrire un quotient sans radical au dénominateur.

Pour cela, on utilise $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2 \times \sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Pour cela, on utilise l'expression conjuguée

L'expression conjuguée de $2 + \sqrt{7}$ est $2 - \sqrt{7}$

$$\frac{3}{2 + \sqrt{7}} = \frac{3 \times \left(2 - \sqrt{7}\right)}{\left(2 + \sqrt{7}\right)\left(2 - \sqrt{7}\right)} = \frac{6 - 3\sqrt{7}}{2^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{6 - 3\sqrt{7}}{4 - 7} = \frac{6 - 3\sqrt{7}}{-3} = -2 + \sqrt{7}$$

Exercice 3 : Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ le plus petit possible.

$A = \sqrt{48}$; $B = 5\sqrt{27} - 3\sqrt{48}$; $C = \sqrt{36 + 64}$;

Exercice 4 : Ecrire sans radical au dénominateur et simplifier les expressions.

$A = \dfrac{3}{2 + \sqrt{7}}$; $B = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$; $C = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$; $D = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x + 1}$$

1. Montrer que, pour tout $x \neq -1$, on a :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1}$$

2. Effectuer les calculs d'image suivants. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

   a. $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$; *b.* $f(\sqrt{5})$; *c.* $f(\sqrt{3} - 1)$

Exercice 6 *:

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Le nombre $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or. Montrer que $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$

Exercice 7 **:

1. Simplifier $A = \sqrt{(3 - \pi)^2}$
2. Soit $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $C = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$. Prouver que $B = C$
3. Soit $D = \sqrt{10 - 2\sqrt{21}}$ et $E = \sqrt{3} - \sqrt{7}$. A-t-on $D = E$?
4. Soit $F = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{3 + \sqrt{8}}$ Prouver que F est un nombre entier

Une expression algébrique contient des nombres et des lettres (qui symbolisent des nombres), ainsi que des opérations et des parenthèses.
Exemple : $2(x+7)-3x^2+4y+29$ est une expression algébrique

Définition ?

Développer une expression algébrique écrite sous la forme d'un produit consiste à l'écrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence).

Réduire une expression algébrique c'est la simplifier

Pourquoi ?

Développer permet :
- de simplifier l'expression
- de faire du calcul mental
- d'utiliser une forme plus adaptée au travail à effectuer !

Développer et réduire

Comment ?

En utilisant la simple distributivité :

$$k(a+b)=k\times a+k\times b$$
$$k(a-b)=k\times a-k\times b$$

En utilisant la double distributivité :

$$(a+b)(c+d)=a\times(c+d)+b\times(c+d)$$
$$=ac+ad+bc+bd$$

En utilisant les identités remarquables :

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Factoriser une expression algébrique écrite sous la forme d'une somme consiste à l'écrire sous la forme d'un produit.

Définition ?

Pourquoi ?

Factoriser permet :
- de faire du calcul mental
- de résoudre des équations
- d'utiliser une forme plus adaptée au travail à effectuer !

Factoriser

Comment ?

En utilisant la simple distributivité : on remarque un facteur commun :

$$k\times a+k\times b=k(a+b)$$
$$k\times a-k\times b=k(a-b)$$

En utilisant les identités remarquables :

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$$
$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$$

Exercice guidé : développer des expressions
Complète les pointillés :
$A=2(3x-1)^2-(5x+3)(2-3x)$
$A=2(\dots x^2-\cdots+1)-(10x-\cdots+\cdots-\cdots)$
$A=18x^2-\cdots+2-10x+\cdots-\cdots+\cdots$ donc $A=\cdots$

Exercice guidé : factoriser des expressions.
Complète les pointillés
$A=6x+3+4(2x+1)^2$
$A=\cdots(2x+1)+4(2x+1)(\dots)$
$A=(2x+1)(\dots+4(\dots))$
$A=(2x+1)(\dots+8x+\cdots)$ donc $A=\cdots$

Exercice guidé : factoriser des expressions.
Complète les pointillés
$A=36x^2-(5x+1)^2$
$A=(\dots)^2-(5x+1)^2$
$A=((6x)+(\dots))((6x)-(\dots))$
$A=(6x\dots)(6x\dots)$ donc $A=\cdots$

Exercice guidé : écrire sous d'une seule fraction
Compléter les pointillés.
$\mathrm{A}\ =\ 4+\dfrac{10}{x-5}$
$A\ =\ \dfrac{4\times(\dots-\dots)}{x-5}+\dfrac{10}{x-5}$
$A\ =\ \dfrac{(\dots+\dots)}{x-5}+\dfrac{10}{x-5}\quad donc\ A\ =\ \dfrac{\dots-\dots}{x-5}$

Exercice 8 : Développer et réduire les expressions suivantes

$A=(2x-9)(3-2x)+5(2x+1)^2$; $B=4(x-6)^2-3(5x+3)(5x-3)$; $C=(6x-7)^2+(5x+10)^2$
$D=-(8x+4)(3x-10)-(6x-3)(6x+3)$; $E=(5-2x^2)^2$; $F=(ax+by)^2$; $G=(2ab^2-3c^3d^4)^2$

Exercice 9 : Factoriser les expressions suivantes

$A=2(5x-1)^2+10x-2$; $B=(x^2-4)-(x+2)^2$; $C=(4x-3)^2-25x^2$; $D=49-(7x+2)^2$

Exercice 10 *: Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$\mathrm{A}=9\mathrm{ab}-6\mathrm{a}^2+12ab^2$; $B=16(a-b)-x^4(a-b)$; $C=7a^2x-7a^2y-2bx+2by$
$D\ =(x-y)^{2n}-\ 4x\,(x-y)^{2n+1}\ +y(x-y)^{2n+2}$

Exercice 11 ** :

1) Soient x et y des réels avec $2x+3y=3$ $et\ xy\ =\ -4$. Déterminer $4x^2+9y^2$
2) Soient x et y des réels avec $x+y=4$ $et\ xy\ =\ -3$. Déterminer x^2+y^2 puis x^4+y^4

Exercice 12 : Ecrire sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$\mathrm{A}\ =\ \dfrac{2x}{3x-1}-5$; $\mathrm{B}\ =\ \dfrac{4}{2x+6}-\dfrac{3}{x-5}$

Exercice 13 :

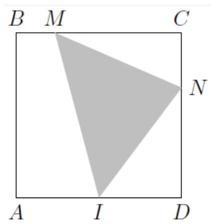
Soit x la largeur d'un rectangle. Elle est égale à sa longueur moins 7.
1. Exprime le périmètre de ce rectangle en fonction de x.
2. Exprime l'aire de ce rectangle en fonction de x.
3. Calcule son périmètre et son aire si $x = 13$cm.

Exercice 14 :

Une piscine propose deux formules pour le paiement des entrées.
• Première formule : abonnement annuel de 20€, plus 2 € par entrée ;
• Deuxième formule : 5€ par entrée.
1. Donne dans chacun des cas le prix payé en fonction de x entrées.
2. Calcule le prix payé suivant les deux formules pour 4 entrées et pour 25 entrées.
Dans chaque cas, quelle est la formule la plus avantageuse ?

Exercice 15 :

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de $[AD]$.
M est un point de $[BC]$ et N un point de $[CD]$ tels que $BM = CN = x$.
Exprimer l'aire du triangle IMN en fonction de x.



Les fonctions

Comment déterminer un antécédent ?

Si f est définie par son tableau de valeurs

Si f est définie par son expression $f(x)$
Pour calculer un antécédent de 2 par f, on résout $f(x) = 2$

Comment déterminer une image ?

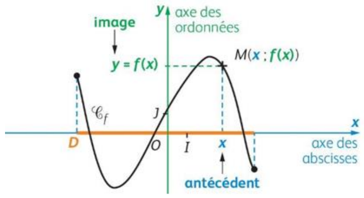
Si f est définie par son tableau de valeurs

x	-4	-3	-2	-1	0	**1**	2	3	← antécédents
$f(x)$	-15	2	5	0	-7	**-10**	-3	20	← images

L'image de 1 est 10. Un antécédent de 5 est -2

Si f est définie par son expression $f(x)$
Pour calculer l'image de 2 par f, on calcule $f(2)$

Si f est définie par sa courbe



D est l'ensemble de définition

Comment déterminer l'ensemble de définition ?

Si f est définie par son expression $f(x)$
- Si f est une fonction polynôme alors D est $\mathbb{R}$
- Si $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ alors $D =]-\infty\,;3[\cup]3;+\infty[$
- Si $f(x) = \sqrt{3x+5}$ alors $D = \left[-\frac{5}{3};\,+\infty\right[$

Comment déterminer l'appartenance d'un point à la courbe ?

Soit $A(x_A;\ y_A)$ On vérifie que $y_A = f(x_A)$.

Comment déterminer les variations, les extrema ?

En utilisant les définitions

f est <u>**croissante sur I**</u> signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,
$\boldsymbol{si\ x_1 \leq x_2\ \ alors\ f(x_1) \leq f(x_2)}$ **: conservation de l'ordre**

f est <u>**décroissante sur I**</u> signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I,
$\boldsymbol{si\ x_1 \leq x_2\ \ alors\ f(x_1) \geq f(x_2)}$ **: inversion de l'ordre**

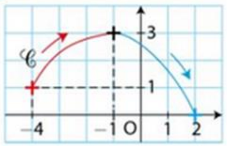
f est <u>**constante sur I**</u> signifie pour tous réels x_1 et x_2 de I, $f(x_1) = f(x_2)$.

f est <u>**monotone sur I**</u> signifie que soit f est croissante sur I, soit f est décroissante sur I.

$f(a)$ est <u>**le maximum de f sur I**</u> si, pour tout réel x de I **:** $\boldsymbol{f(x) \leq f(a)}$

$f(a)$ est <u>**le minimum de f sur I**</u> si, pour tout réel x de I **:** $\boldsymbol{f(x) \geq f(a)}$

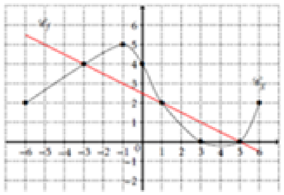
En utilisant la représentation graphique :**Tableau de variations**



x	-4	-1	2
$f(x)$	1 ↗	3	↘ 0

Comment résoudre des équations et inéquations graphiquement ?

Tableau de signes



x	-6		3		5		6
$g(x)$		+	0	−	0	+	

$\boldsymbol{f(x)} \ = \boldsymbol{k}$: on cherche les antécédents de k.

$\boldsymbol{f(x)} \ = \boldsymbol{g(x)}$: on cherche les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

$\boldsymbol{f(x)} \ \geq \boldsymbol{k}$: on cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ pour lesquels leur ordonnée est supérieure ou égale à k.

$\boldsymbol{f(x)} \ < \boldsymbol{k}$: on cherche les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Comment déterminer la parité d'une fonction ?

Si f est défini sur I :
Pour tout x de I, si $-x$ appartient à I et si $f(-x) = -f(x)$

***f* est impaire**

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère

Si f est défini sur I :
Pour tout x de I, si $-x$ appartient à I et si $f(-x) = f(x)$

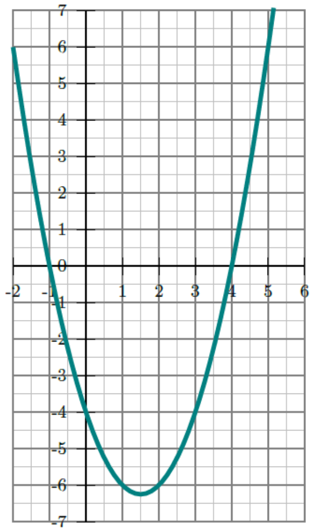
***f* est paire**

$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 3x - 4$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

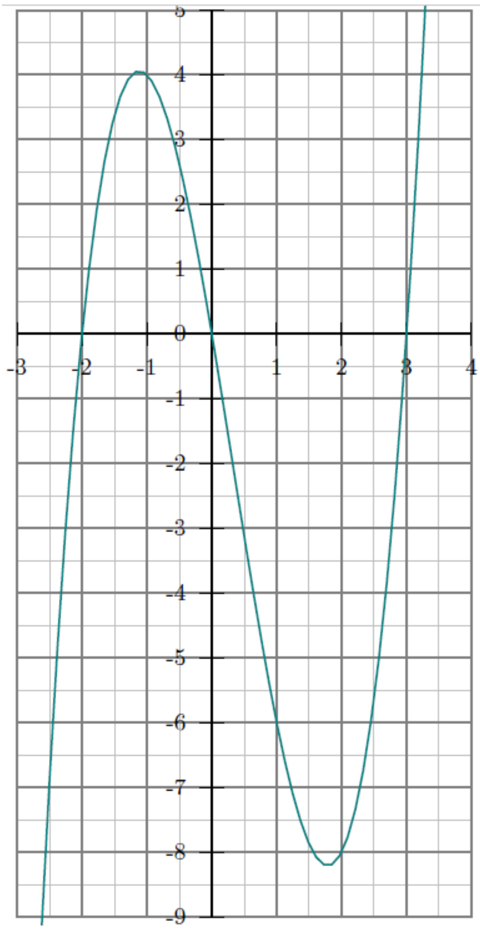
1. a. Déterminer graphiquement l'image par f de 5.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -4$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
5. Dresser le tableau de signes de la fonction f.



Exercice 17 :

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

1. a. Déterminer graphiquement l'image par f de $\frac{-3}{2}$
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. a. Développer $(x - 3)(x + 2)$.
   b. En déduire l'expression factorisée de f.
   c. Calculer les antécédents de 0 par f.
   d. Retrouver graphiquement les résultats.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f par lecture graphique.
4. En utilisant la factorisation de f, dresser le tableau de signes de f.
5. a. Déterminer graphiquement les antécédents de -6 par f.
   b. Factoriser $x^3 - x^2$ et $-6x + 6$.
   c. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = -6$.

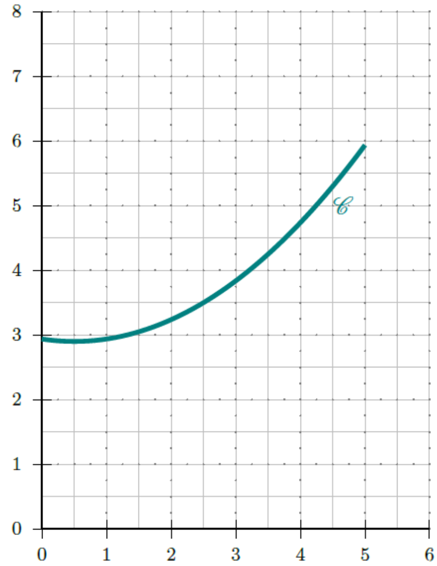


Exercice 18 :

Une entreprise fabrique des cartes à puces électronique à l'aide d'une machine.
La fonction f représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.
On a $f(x) = 0,15x^2 - 0,15x + 2,9375$
La courbe C représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.

1. Déterminer graphiquement le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
   (Valeur approchée à la dizaine de cartes près)
2. Chaque carte fabriquée est vendue 1,50 €.
   Exprimer, en fonction de x, la recette $R(x)$ perçue pour la vente de x centaines de cartes.
3. Représenter graphiquement la fonction R ainsi définie.

4. Exprimer en fonction de x, le bénéfice $B(x)$ réalisé pour la fabrication et la vente de x centaines de cartes.
5. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice si $B(x) > 0$.
En utilisant le graphique, indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice. (Valeur approchée à la dizaine près)



Equations

Linéaires du 1er degré

$$2x+1=-x+3 \Leftrightarrow 2x+1+x-3=0$$
$$\Leftrightarrow 3x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Du type $x^2=a$

- Si $a>0$, alors $x^2=a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Si $a=0$, alors $x^2=a$ admet une solution : 0.
- Si $a<0$, alors l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution

Du type $\sqrt{x}=a$

- Si $a>0$, alors $\sqrt{x}=a$ admet une solution : a^2
- Si $a=0$, alors $\sqrt{x}=a$ admet une solution : 0.
- Si $a<0$, alors l'équation $\sqrt{x}=a$ n'admet aucune solution

Equations rationnelles

$$\frac{5x-3}{x+2}=0 \Leftrightarrow 5x-3=0 \text{ et } x+2\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{5} \text{ et } x\neq -2$$

Donc $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

Du type $|x-a|=r$

$x=a-r$ ou $x=a+r$

$S=\{a-r;a+r\}$

du 2nd degré ou plus

Mettre l'équation sous forme $f(x)=0$

- J'arrive à factoriser et je résous une équation produit-nul du type $(2x+4)(5x-6)=0$
- Je n'arrive pas à factoriser
  - Je développe $f(x)$
    - Aucune simplification n'apparaît
      - Je vérifie mon développement
        - Il est juste → J'arrive à factoriser et je résous une équation produit-nul du type $(2x+4)(5x-6)=0$
        - Il est faux → Je développe $f(x)$
    - Des simplifications apparaissent
      - J'obtiens une équation linéaire du 1er degré du type $ax+b=0$
      - J'arrive à factoriser et je résous une équation produit-nul du type $(2x+4)(5x-6)=0$

Exercice 19 : Résoudre les équations suivantes

a) $3(2x-3)+3x=5x-2(5-9x)$; ***b***) $2x+3=-3x+7$; ***c***) $-4x+1=9$;
d) $(-x-4)(-x+7)=0$; ***e***) $9(-3x-1)(6x-36)=0$; ***f***) $-x(x+16)(2-5x)=0$;
g) $\dfrac{4x-7}{5x+3}=0$ ***h***) $\dfrac{-2+10x}{2x+4}=\dfrac{5x}{x-4}$ ***i***) $|x-7|=2$ ***j***) $|x+2|=5$ ***k***) $|x-10|=-5$

Exercice 20 *: Résoudre les équations suivantes

a) $2(x-1)(x-3.5)=4x^2-28x+49$ ***b***) $x+1=\dfrac{9}{x+1}$ ***c***) $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$

d) $\dfrac{16x^2-25}{2x-3}=\dfrac{4x-5}{3}$

Exercice 21* :

On cherche une méthode pour résoudre l'équation suivante : $x^2+2x-8=0$.
L'idée est de se ramener à la résolution d'une équation produit nul
1) a) En utilisant une identité remarquable, compléter l'égalité ci-dessous :
$$x^2+2x=(x+\cdots)^2-\cdots$$
b) En déduire que l'équation $x^2+2x-8=0$ équivaut à $(x+1)^2-9=0$.
c) En remarquant la présence d'une identité remarquable, déduire les solutions de l'équation $x^2+2x-8=0$
2) En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre l'équation $x^2+12x+11=0$.

Inéquations

Linéaires du 1er degré

- $2x+1<-x+3 \Leftrightarrow 2x+1+x-3<0$
  $\Leftrightarrow 3x-2<0$
  $\Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$ et $a=3, a>0$

Donc $S=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$

- $-2x+1<-x+3 \Leftrightarrow -2x+1+x-3<0$
  $\Leftrightarrow -x-2<0$
  $\Leftrightarrow x>\frac{2}{-1}$ et $a=-1, a<0$

Donc $S=]-2;+\infty[$

Tableau de signes d'une fonction affine

- On note $f(x)=ax+b$
- On commence par déterminer la valeur de x pour laquelle $ax+b=0$
- Si $a>0$ alors **f est croissante sur $\mathbb{R}$**, elle est donc « d'abord négative puis positive »

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$ alors **f est décroissante sur $\mathbb{R}$**, elle est donc « d'abord positive puis négative »

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Inéquation $|x-a|\leq r$

$S=[a-r;a+r]$

$|x-3|\leq 4$
$\Leftrightarrow x\in[3-4;3+4]$
$\Leftrightarrow x\in[-1;7]$

Inéquation produit

$(-5x-15)(2x-8)<0$

- On cherche les valeurs qui annulent le produit :

$(-5x-15)(2x-8)=0 \Leftrightarrow -5x+15=0$ *ou* $2x-8=0$
$\Leftrightarrow x=-3$ ou $x=4$

- On remplit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-5x-15$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-5x-15)(2x-8)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- On répond à la question en lisant la dernière ligne du tableau
  $S=]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

Inéquation quotient

$\frac{-5x-15}{2x-8}\leq 0$

- On cherche les valeurs qui annulent le quotient :
$-5x-15=0 \Leftrightarrow -5x+15=0 \Leftrightarrow x=-3$
- On cherche les valeurs interdites du quotient :
  $2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$: 4 est la valeur interdite
- On remplit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$-5x-15$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-5x-15}{2x-8}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

- On répond à la question en lisant la dernière ligne du tableau
  $S=]-\infty;-3]\cup]4;+\infty[$

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
$a)\ 6x + 7 > 4x + 10$; $b)\ x + 3 \leq 9x + 36$

Exercice 23 :

1. Etudier le signe de $P(x) = (-3x + 12)(7 - 2x)$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 24 :

1. Etudier le signe du quotient
$$Q(x) = \frac{-2x + 5}{x - 3}$$
2. En déduire les solutions de l'inéquation $Q(x) \geq 0$

Exercice 25 :

Résoudre les inéquations suivantes

$a)\ (-7x + 8)(5x - 3) \leq 0$; $b)\ -4x(2x + 3)(-6x - 5) > 0$
$d)\ \dfrac{3x + 9}{x - 5} < 0$; $e)\ \dfrac{-6x - 7}{1 + x} \geq 0$

Exercice 26 :

Résoudre les inéquations suivantes

$a)\ (5x + 2)^2 - (5x + 2)(-3x - 7) > 0$; $b)\ (3x - 2)^2 < 49$
$c)\ 5 + \dfrac{1}{x + 4} \geq 0$ $d)\ \dfrac{3}{2x - 1} \geq \dfrac{2}{-3x + 15}$

Exercice 27 * :

On considère deux nombres réels x et y dont la somme vaut 20.
On souhaite que leur produit P soit supérieur ou égal à 91.
1) Exprimer y en fonction de x.
2) Démontrer que résoudre l'inéquation $P > 91$ revient à résoudre l'inéquation $(7 - x)(x - 13) \geq 0$.
3) Conclure

Exercice 28 *:

Résoudre les inéquations suivantes
$a)\ (5x + 1)^2 + 9 \leq 0$; $b)\ \dfrac{4x^3 - 9x}{x^2 - 16} \geq 0$ $c)\ (3x + 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 0$ $d)\ \dfrac{5x + 3}{3x + 5} \leq \dfrac{3x + 5}{5x + 3}$

Information chiffrée

Proportion

Pourcentage

Proportion d'un sous ensemble A dans un ensemble E est :

$$\frac{n_A}{n_E} = \frac{p}{100}$$

A représente $p\%$ de E

Prendre p% d'un nombre c'est multiplier ce nombre par $\frac{p}{100}$

Pourcentage de pourcentage

Soit A et B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$.
Si p_1 est la proportion de A dans B et p_2 la proportion de B dans E, alors la proportion de A dans E est :

$$\boldsymbol{p = p_1 \times p_2}$$

Evolution

Une seule évolution

$$V_D \longrightarrow V_A$$

Variation absolue
$\boldsymbol{V_A - V_D}$

Coefficient multiplicateur : **CM**

$$CM = \frac{V_A}{V_D}$$

Variation relative = **Taux d'évolution : t**

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$$

$\boldsymbol{CM = 1 + t}$
$\boldsymbol{t = CM - 1}$

$\boldsymbol{t > 0}$: c'est une augmentation
$\boldsymbol{t < 0}$: c'est une diminution

$\boldsymbol{CM > 1}$: c'est une augmentation
$\boldsymbol{CM < 1}$: c'est une diminution

Augmentation de $t\%$: $\boldsymbol{CM = 1 + \frac{t}{100}}$
Diminution de $t\%$: $\boldsymbol{CM = 1 - \frac{t}{100}}$

Evolutions successives

$$V_D \xrightarrow{\times CM_1} V_1 \xrightarrow{\times CM_2} V_A$$

$$V_D \xrightarrow{\times CM_G} V_A$$

Coefficient multiplicateur global : $\boldsymbol{CM_G}$
$\boldsymbol{CM_G = CM_1 \times CM_2}$

Evolution réciproque :

$$V_D \xrightarrow{\times CM} V_A \qquad V_A \xrightarrow{\times CM_R} V_D$$

Coefficient multiplicateur réciproque : $\boldsymbol{CM_R}$

$$\boldsymbol{CM_R = \frac{1}{CM}}$$

Exercice 29 :

Dans un club de sport, il y a 450 adhérents dont 54 pratiquent le volley-ball.
1) Quel est le pourcentage d'adhérents qui pratiquent le volley-ball ?
2) Quel est le pourcentage d'adhérents qui ne pratiquent pas le volley-ball ?

Exercice 30 :

Il y a 800 élèves au lycée Alfred Hitchcock.
Dans ce lycée,

- 15% des élèves sont des filles de Première ;
- 48% des élèves de Première sont des filles ;
- 25% des filles du lycée sont en Première.

1) Compléter le tableau ci-dessous en écrivant les calculs utiles.

Classe \ Sexe	Filles	Garçons	Total
Premières			
Autres			
Total			800

2) Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce lycée.

Exercice 31 :

Un commerçant veut revoir sa politique commerciale et avoir une meilleure compréhension du prix de vente des articles mis en vente.
1) Le prix d'un article A augmente de 10 % puis il diminue de 10 %. Son prix initial est-il égal à son prix de départ ?
2) Le prix d'un article B augmente de 20 %.
De quel pourcentage son nouveau prix doit-il baisser pour retrouver son prix initial ? (On demande un résultat avec une décimale de précision.)
3) Le prix d'un article C subit les variations de prix suivantes :

$+7\ \%$; $+15\ \%$; $-10\ \%$; $-20\ \%$; $+12\ \%$

Quel est le pourcentage global de variations ? (On donnera le résultat avec deux décimales de précision.)

Exercice 32 :

Compléter le tableau suivant :

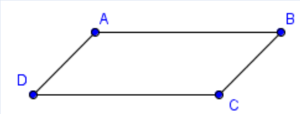
Prix initial	Prix final	Taux d'évolution en pourcentage	Coefficient multiplicateur
17 €		+ 14%	
	120 €	−20 %	
544 €			0,915
	11 €		1,237
4 €		+ 7,3 %	
123 €	132 €		
11 €	9,5 €		

Vecteurs

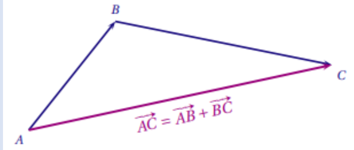
Géométriquement

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à

- C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Les segments $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu
- **Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme**
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont la même direction, le même sens et la même norme
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: égalité du parallélogramme



Relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



- Simplification d'expressions vectorielles
- Construction de la somme de vecteurs

I milieu de $[AB]$ ⟷ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Vecteurs opposés : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

- (AB) et (CD) sont parallèles
- A, B et C sont alignés

Analytiquement

Base du plan
$(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est appelé **base du plan :** $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ non colinéaires

Dans une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ alors :

- $\vec{u} = x_{\vec{u}}.\vec{\imath} + y_{\vec{u}}.\vec{\jmath}$
- $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$
- $k.\vec{u}\begin{pmatrix} k \times x_{\vec{u}} \\ k \times y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ alors :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_{\vec{u}})^2 + (y_{\vec{u}})^2}$

Dans une base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ alors :

$\mathbf{det}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \times y_{\vec{u}}$

Egalité de vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ **$x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}}$**

Colinéarité de vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \mathbf{det}(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = 0$

Repère du plan : $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ non colinéaires, O un point du plan
$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est appelé **repère du plan**

- (AB) et (CD) sont parallèles
- A, B et C sont alignés

Dans un repère du plan, $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le milieu I du segment $[AB]$ $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Dans un repère orthonormé u plan, alors :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exercice 33 :

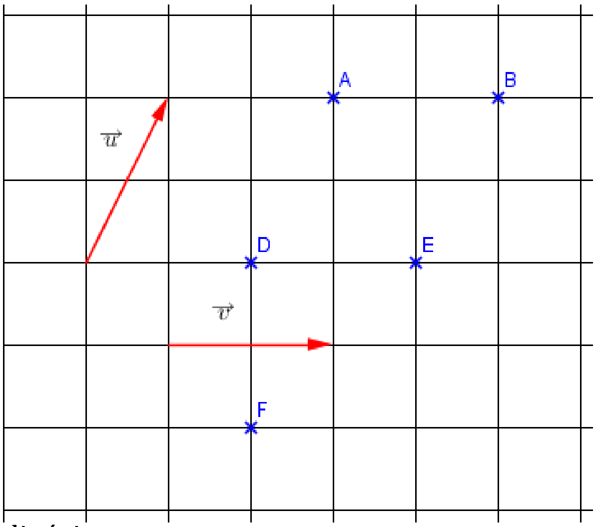
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque affirmation, trouver la (ou les) réponse(s) correcte(s).

1. $REVI$ est un parallélogramme, alors :

a. $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{VI}$ **b.** $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{VI}$ **c.** $\overrightarrow{RV} = \overrightarrow{EI}$ **d.** $\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{VE}$

2. $SION$ est un parallélogramme, alors :

a. $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IO}$ **b.** $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}$ **c.** $\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ON}$ **d.** $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IO}$



3. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{CA}$ **b.** $\overrightarrow{DA}$ **c.** $\overrightarrow{BE}$ **d.** $\overrightarrow{FE}$

4. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{EA}$ **b.** $\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{FE}$ **d.** $\overrightarrow{DB}$

5. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est égal à :

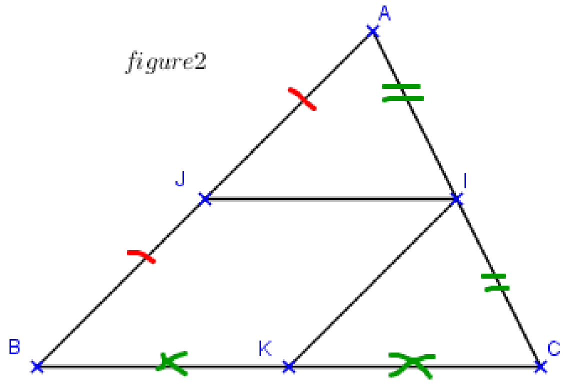
a. $\overrightarrow{EA}$ **b.** $\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{FE}$ **d.** $\overrightarrow{DB}$

6. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{EA}$ **b.** $\overrightarrow{CB}$ **c.** $\overrightarrow{FE}$ **d.** $\overrightarrow{DB}$

7. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont :

a. *colinéaires* **b.** égaux **c.** opposés **d.** non colinéaires



8. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont :

a. *colinéaires* **b.** égaux **c.** opposés **d.** *non colinéaires*

9. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont :

a. *colinéaires* **b.** égaux **c.** opposés **d.** *non colinéaires*

10. Dans la figure 2 ci-contre, quelles égalités sont vraies :

a. $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ **b.** $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{IK}$ **c.** $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BK}$

d. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}$

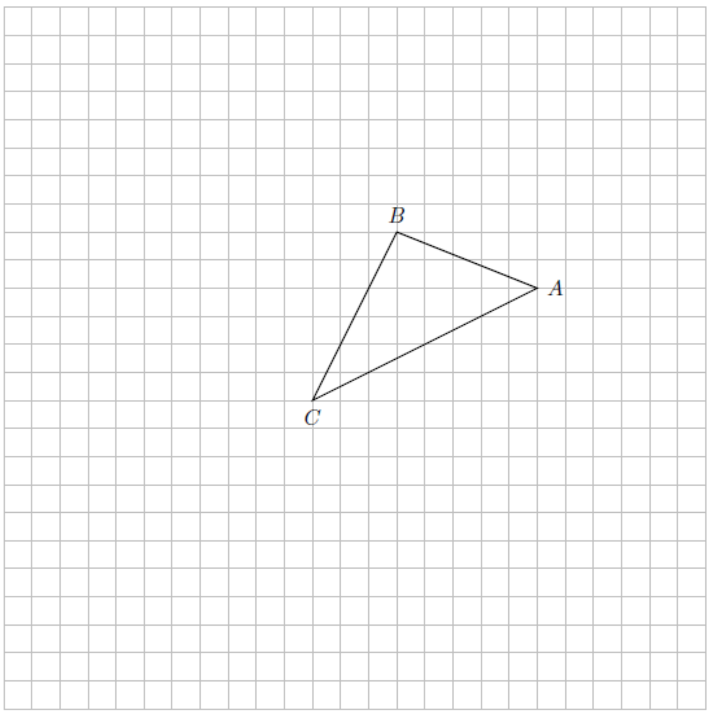
Exercice 34 :

On considère le triangle ABC,

Construire les points D, E et F tels que :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FB} = \frac{3}{2}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}.\overrightarrow{BC}$



Exercice 35 *:

Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3.\overrightarrow{AD}$$

Démontrer que les points C, E et F sont alignés

Exercice 36 *:

Soit un triangle ABC. On considère les points K, L et M milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, P le milieu de $[LC]$ et Q le symétrique de K par rapport à B.

1. Donner les coordonnées des points P, M et Q dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.
2. Les points P, M et Q sont-ils alignés ?

Exercice 37 :

On considère dans un repère $(O\ ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\ )$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} ;\ \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} \ ; A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} ;\ \ B\begin{pmatrix}0.5\\-1\end{pmatrix} \ \ et\ C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$; $-3\vec{u}$; $-3\vec{u} + 2\vec{v}$
2. Calculer la distance AB.
2. Calculer les coordonnées du milieu E de $[BC]$.
3. Calculer les coordonnées du point D symétrique de B par rapport à A.
4. Déterminer les coordonnées du point F tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.

Exercice 38 :

On considère dans un repère $(O\ ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\ )$

$$A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} ;\ \ B\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} ;\ \ C\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \ ; D\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} ;\ \ E\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les points $A, B\ et\ C$ sont alignés.
2. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Une droite (d) est définie par :

Un point et son vecteur directeur

Un point et son coefficient directeur

Une équation de la droite (d)

Une équation cartésienne de la droite (d)

Une équation réduite de la droite (d)

- Une équation cartésienne de (d) est de la forme :
  $\boldsymbol{ax+by+c=0}$ avec $(a;b)\neq(0;0)$
- (d) admet une infinité d'équations cartésiennes
- Un **vecteur directeur** de (d) est :
  $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}$ appartient à la droite d'équation $ax+by+c=0$
si et seulement si $a\times x_A+b\times y_A+c=0$

- L'équation réduite de (d) **non parallèle à l'axe des ordonnées** est de la forme :
  $\boldsymbol{y=mx+p}$

$\boldsymbol{m}$: **coefficient directeur (ou pente) de (d)**
$\boldsymbol{p}$: **ordonnée à l'origine de (d)**

- Un **vecteur directeur** de (d) est :
  $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}$ appartient à la droite d'équation $y=mx+p$
si et seulement si $y_A=m\times x_A+p$

- L'équation réduite de (d) **parallèle à l'axe des ordonnées** est de la forme :
  $\boldsymbol{x=k}$, k un réel
- (d) admet une seule et unique équation réduite
- Un vecteur directeur de la droite est $\vec{j}(0;1)$

(d) admet une seule et unique équation réduite

Si $A\begin{pmatrix}x_A\\ y_A\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x_B\\ y_B\end{pmatrix}$ sont deux points distincts avec $x_A\neq x_B$
$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
on calcule p en remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou de B).

Droites parallèles

si et seulement si leurs **vecteurs directeurs** sont **colinéaires**

si et seulement si leurs **coefficients directeurs** sont **égaux**

Droites sécantes

$(d):\ ax+by+c=0$ et $(d'):\ a'x+b'y+c'=0$

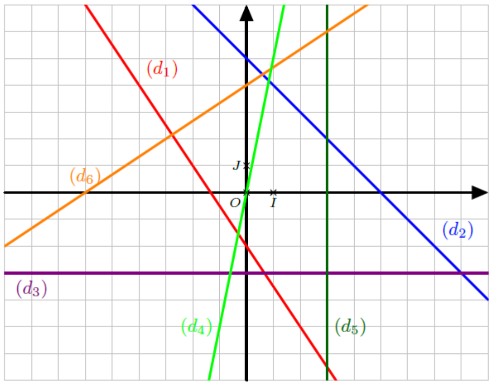
$(d):\ y=mx+p$ et $(d'):\ y=m'x+p'$

On cherche le point d'intersection des deux droites, (d) et (d') on résout le système de deux équations linéaires.

- par substitution
- par combinaison

Exercice 39 :

Pour chaque droite tracée sur le graphique ci-dessous, déterminer son équation réduite.



Exercice 40 :

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

On se place dans un repère $(O; I; J)$.

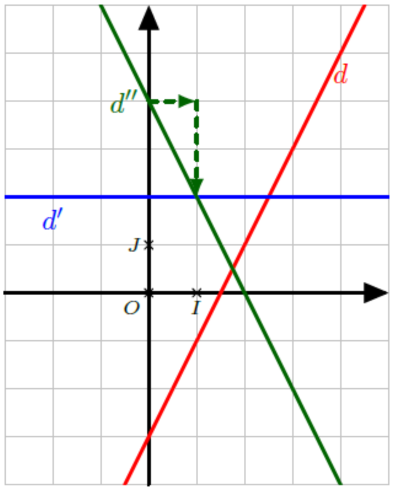
Soit Δ la droite d'équation $y = 5x + 3$.

1) Le point C $(-2\ ;\ 7)$ appartient à la droite Δ.

2) La droite Δ' d'équation $y = 3x - 2$ et la droite Δ sont parallèles.

3) Le point D $(-2{,}5\ ;\ -9{,}5)$ appartient aux deux droites Δ et Δ'.

Les questions 4 à 10 se réfèrent au graphique ci-contre.



4) Une équation de la droite d est $y = -3x + 2$.

5) La droite d' a pour équation $y = 2$.

6) Le coefficient directeur de la droite d est 2.

7) Le coefficient directeur de la droite d' est 1.

8) La droite d' est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

9) Les flèches en pointillés permettent de lire graphiquement le coefficient directeur de la droite d''.

10) Le coefficient directeur de la droite d'' est égal à $-\frac{1}{2}$

Exercice 41 :

Le plan est rapporté à un repère $(O; I; J)$.

1) Tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $(d_1) : y = -0{,}5x - 2$ et $(d_2) : y = 4x - 20$.

2) a) Tracer la droite (d_3) passant par le point $A(-2; 5)$ et de coefficient directeur m = $-\frac{3}{2}$

   b) Déterminer l'équation réduite de (d_3).

3) a) Justifier que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.

   b) Calculer les coordonnées de M point d'intersection de (d_1) et (d_2).

   c) Le point M appartient-il à (d_3) ? (Si c'est le cas, on dit que les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes en M).

Exercice 42 :

Dans un repère $(O\ ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\ )$, on donne les points $A(-3; 2)$, $B\ (4; 4)$, $C\ (4;\ -2)$ et $D(1;\ -4)$.

1) Déterminer, par le calcul, une équation de chacune des droites (AB), (AC) et (BC).

2) a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.

   b) Calculer l'abscisse du point de la droite (AB) dont l'ordonnée est 5.

3) a) Vérifier que le point D n'appartient pas à la droite (AC).

   b) Déterminer, par le calcul, une équation de la droite (Δ) parallèle à (AC) et passant par D.

Exercice 43 :

Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix.

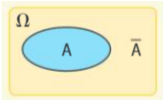
$$\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$$

$$** \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ \frac{1}{2}x + 3y = \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases}$$

Les probabilités

Vocabulaire

Expérience aléatoire : expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat.
Issue : résultat possible d'une expérience aléatoire.
Univers de l'expérience aléatoire : l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire, souvent noté Ω
Evènement : un sous-ensemble de Ω.
Evènement élémentaire : un événement qui ne contient qu'une seule issue.
Evènement certain : un événement toujours réalisé
Evènement impossible : un événement jamais réalisé, noté $\emptyset$
Evènement contraire d'un évènement A : évènement constitué des issues n'appartenant pas à A, noté $\overline{A}$



On dit qu'un événement est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est un des éléments qui le compose.

Propriétés

- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

A et B deux évènements de l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

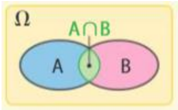
Situation d'équiprobabilité

- Toutes les issues ont la même probabilité
- A un évènement de Ω :

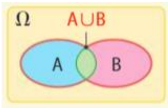
$$P(A) = \frac{\textit{nombre d'issues de } A}{\textit{nombre total d'issues}}$$

Réunion et intersection d'évènements

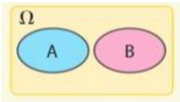
Evènement "A et B", noté $A \cap B$: événement formé des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.



Evènement "A ou B", noté $A \cup B$: événement formé des issues qui appartiennent à au moins un de ces deux évènements.



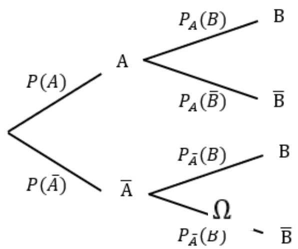
Evènements incompatibles : Deux événements ne pouvant être réalisés en même temps.



Méthode de modélisation pour dénombrer

Arbre

A privilégier lorsqu'il y a un contexte de chronologie (c'est-à-dire lorsque l'énoncé donne des probabilités conditionnelles)



$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$A \cap \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
$\bar{A} \cap B$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

Tableau à double entrée

A privilégier lorsque l'énoncé donne la valeur des probabilités des intersections des événements.

	A	$\overline{A}$	Total
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$	B
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{B}$
Total	A	$\overline{A}$	

Exercice 44 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, seule une réponse parmi celles proposées est exacte.

1) À Noël, Robin s'est fait offrir la trilogie des films « Batman » (trois films, sortis en 2005, 2008 et 2012). Il insère au hasard l'un des DVD dans son lecteur. Quel est la probabilité que ce soit le film le plus récent ?

$a)\ \frac{1}{6}$ $b)\ \frac{1}{3}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{2}{3}$

2) Robin place les trois DVD côte à côte, mais au hasard, sur une étagère. Quelle est la probabilité que les films soient rangés dans l'ordre chronologique de gauche à droite ?

$a)\ \frac{1}{6}$ $b)\ \frac{1}{3}$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ \frac{2}{3}$

3) On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32. On note A l'événement : « Obtenir au moins un roi ».

L'événement $\bar{A}$ est :

a) « Obtenir exactement un roi » b) « N'obtenir aucun roi » ;

c) « Obtenir au moins une dame » d) « Obtenir deux rois ».

4) Soient A et B deux événements issus d'une même expérience aléatoire.

Sachant que $P(B) = 0.3; P(A \cap B) = 0.1$ et $P(A \cup B) = 0.5,$ on peut dire que la probabilité de l'évènement A est :

$a)$ 0.1 $b)$ 0.2 $c)$ 0.3 $d)$ 0.4

5) On lance une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir « Pile » est :

$a)$ 0.25 $b)$ 0.5 $c)$ 0.75 $d)$ 1.

6) On lance 2 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est :

$a)$ 0.25 $b)$ 0.5 $c)$ 0.75 $d)$ 2.

7) On lance 8 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir huit fois « Pile » est :

$a)\ \frac{1}{8}$ $b)\ \frac{1}{4}$ $c)$ environ 0.001 à 10^{-3}près $d)$ environ 0.004 à 10^{-3}près

Exercice 45 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements suivants : A : « Tirer un trèfle » et B : « Tirer un roi ».

1) Déterminer les probabilités des événements A et B.

2) Définir par une phrase l'événement $\bar{A}$ puis calculer sa probabilité.

3) a) Définir par une phrase les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

b) Déterminer $P(A \cap B)$.

c) En déduire $P(A \cup B)$.

Exercice 46 :

Une roue de loterie est formée de cinq secteurs. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Secteur	1	2	3	4	5
Probabilité	0.2	0.25	0.1	p_4	p_5

1) Déterminer p_4 et p_5 sachant que p_5 est le double de p_4.

2) On lance cette roue puis on attend l'arrêt.

a) Quelle est la probabilité que la flèche indique un multiple de 2 ?

b) Quelle est la probabilité que la flèche indique un secteur avec un numéro inférieur ou égal à 3 ?

Exercice 47 :

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux bleues « B » et trois rouges « R ».

On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est bleu et contient un jeton bleu « b » et trois jetons rouges « r »; l'autre est rouge et contient deux jetons bleus « b » et deux jetons rouges « r ».

On extrait une boule de l'urne puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

1) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la probabilité de l'événement A : « La boule et le jeton sont de la même couleur ».

Exercice 48 :

Dans un lycée de 1 280 élèves, 300 élèves se font vacciner contre la grippe.
Pendant l'hiver, il y a une épidémie de grippe et 10% des élèves contractent la maladie. De plus, 3% des élèves vaccinés ont la grippe.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Nombre d'élèves ayant eu la grippe	Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe	Total
Nombre d'élèves vaccinés			
Nombre d'élèves non vaccinés			
Total			1280

2 On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.
Calculer la probabilité des événements suivants :
a) A : « L'élève a été vacciné » ;
b) B : « L'élève a eu la grippe » ;
c) C : « L'élève a été vacciné et a eu la grippe ».
3) On choisit au hasard l'un des élèves non vaccinés. Calculer la probabilité de l'événement D : « L'élève a eu la grippe »

Paramètres de position

Moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{N}$$

Linéarité de la moyenne : Soit a et b deux réels. Si la série statistique de valeurs x_i a pour moyenne $\bar{x}$, alors la série de valeurs $y_i = a \times x_i + b$ a pour moyenne $\bar{y} = a \times \bar{x} + b$

Médiane M_e : nombre tel qu'au moins 50% des valeurs de la série lui sont inférieures ou égales et au moins 50% lui sont supérieures ou égales.

Pour déterminer la médiane : On ordonne **les valeurs** de la série **par ordre croissant**.

- **Si N est impair**, la médiane M_e est la valeur centrale du caractère c'est-à-dire la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$ de la série ordonnée.
- **Si N est pair**, la médiane M_e est la moyenne des deux valeurs centrales du caractère c'est-à-dire la moyenne des valeurs de rangs $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$ de la série ordonnée.

Série statistique :

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$

Effectif cumulé croissant d'une valeur : somme des effectifs des valeurs qui lui sont inférieures ou égales.

Fréquence d'une valeur : $f_i = \frac{n_i}{N}$

Paramètres de dispersion

Quartile Q_1 : la plus petite valeur de la série, telle qu'au moins 25% des valeurs lui sont inférieures ou égales.
Quartile Q_3 : la plus petite valeur de la série, telle qu'au moins 75% des valeurs lui sont inférieures ou égales.

Pour déterminer les quartiles : on ordonne **les valeurs** de la série **par ordre croissant**.
Pour le 1er quartile, on cherche le 1er entier j supérieur ou égal à $\frac{N}{4}$. Alors $Q_1 = x_j$.
Pour le 3ème quartile, on cherche le 1er entier k supérieur ou égal à $\frac{3N}{4}$. Alors $Q_3 = x_k$

Ecart interquartile : $Q_3 - Q_1$
L'écart interquartile mesure la dispersion autour de la médiane.
Il contient environ 50% des valeurs de la série

Etendue : différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur

Variance : V
Ecart-type : σ

$$V = \frac{n_1 \times (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 \times (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_p \times (x_p - \bar{x})^2}{N}$$

$$\sigma = \sqrt{V}$$

σ mesure la dispersion autour de la moyenne. Pour des séries dont la moyenne est proche, la série la plus dispersée est celle dont l'écart-type est le plus grand

Exercice 49 :

On donne maintenant le nombre d'essais inscrits par le Castres Olympique au cours de la saison 2018/2019 :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2

1) Déterminer le nombre moyen d'essais par match.
2) Déterminer la fréquence en % de chaque catégorie. Arrondir au centième.
3) Déterminer la médiane de la série statistique. En donner une interprétation concrète.
4) Déterminer le premier et le troisième quartile de la série.

Exercice 50 :

Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2102 €. L'entreprise annonce qu'elle va reverser une prime de 150 € à tous ses employés le mois prochain.
Quel sera alors le revenu moyen (salaire + prime) des employés de cette entreprise ?

Exercice 51 :

Les opérateurs téléphoniques doivent mettre à disposition de leurs clients une offre de service en langue des signes française. Le rapport du 3ème trimestre 2022 de l'ARCEP donne les notes données à ce service par les utilisateurs.
1) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ des notes.
2) Quel pourcentage des notes se trouvent dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$?

Notes	1	2	3	4	5
Effectif	1239	384	1135	3182	21 909