Ex. 1. 1) $-1 \leq x \leq 2$ donc $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq x \leq 2$

donc $0 \leq x^2 \leq 1$ et $0 \leq x^2 \leq 4$

car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$

donc $0 \leq x^2 \leq 4$

donc $-4 \leq -x^2 \leq 0$ car $\times(-1)$ inverse l'ordre.

donc $5-4 \leq 5-x^2 \leq 5$ car ajouter 5 conserve l'ordre.

donc $1 \leq 5-x^2 \leq 5$

donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{5-x^2} \leq 1$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2) f n'est définie que si $5-x^2 \neq 0$.

$5-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$.

f est dérivable sur tout intervalle I de $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur I

$f=\frac{u}{v}$ avec $v \neq 0$. $\forall x \in I$, $f'(x)=\frac{2x}{(5-x^2)^2}$

$\forall x \in I$, $(5-x^2)^2>0$. et $2x>0$ pour $x \in [0 ; +\infty[$ et $2x<0$ pour $x \in]-\infty ; 0]$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-1		0		2		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$-$		0		$+$		$\Vert$	$+$	
variations de f.			$\Vert$		$1/4$		$1/5$		1		$\Vert$		

sur $[-1 ; 2]$

f admet un minimum en 0, égal à $1/5$ et f admet un maximum en 2, égal à 1.

Donc : $\forall x \in [-1 ; 2]$, $\frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$

$\forall x \in [-1 ; 2]$, $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{5-x^2} \leq 1$

Ex. 2. 1) $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{k^2}-\frac{1}{k(k-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(k-1)-k}{(k-1)k^2} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{(k-1)(k^2)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{(k-1)k^2} \leq 0$

or $-1 < 0$ et $k^2 \geq 0$ et $k-1 \geq 1 \geq 0$ (car $k \geq 2$)

donc $\dfrac{-1}{k^2(k-1)} \leq 0$, pour tout $k \geq 2$

donc $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$, pour tout $k \geq 2$.

• $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$

2) $$B = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)$$

$$= \sum_{k=2} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2} \frac{1}{k}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{19}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{20}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{20}$$

3) $$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2}$$

or $\forall k \geq 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k(k-1)}$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2} \leq B$ or $B = 1 - \dfrac{1}{20}$

$$\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{20}$$

ainsi $\displaystyle 1 + \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{20}$. D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{20}$

4) Algorithme :

$S \leftarrow 0$

Pour k variant de 1 à 20

  $S \leftarrow S + \dfrac{1}{k^2}$

Fin pour

Afficher S.

en Python :

```
S = 0
for k in range(1, 21):
    S = S + 1/k**2
print(S)
```

On obtient alors : $A \simeq 1{,}596163243913023$

On a bien $A \leq 2 - \dfrac{1}{20}$

5) Comme, $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

on a $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

or $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n}$

donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$

ainsi $1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

or, $\forall n \geq 1$, $2 - \frac{1}{n} \leq 2$

d'où, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Exe 3. Développements

1) $P(x) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2) $Q(x) = x^4 + 4x^2 + 1$

3) $R(x) = -20x^2 - 2$

Factorisation

1) $Q(x) = 9x^4 - 36 = 9(x^4 - 4) = 9(x^2 - 2)(x^2 + 2)$
$= 9(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$

2) $R(x) = x^3(x-1) - 9x(x-1)$
$= (x-1)(x^3 - 9x)$
$= (x-1) \times x \times (x^2 - 9)$
$= x(x-1)(x-3)(x+3)$

3) 1 est une racine évidente : $S(1) = 0$
donc $S(x)$ est factorisable par $x-1$

$S(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 77)$

$x^2 + 4x - 77$ est un polynôme du 2^nd degré : $a = 1$; $b = 4$; $c = -77$

$\Delta = 324$; $x_1 = -11$; $x_2 = 7$

donc $S(x) = (x-1)(x+11)(x-7)$.

4) $T(x) = (x+4)^2(x-5)^2$

5) -2 est une racine évidente : $U(-2)=0$
donc $U(x)$ est factorisable par $x+2$

$$U(x) = (x+2)(x^2-11x+24)$$

$x^2-11x+24$ est un trinôme du 2^{nd} degré $a=1$, $b=-11$, $c=24$

$\Delta = 25$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 8$

donc $U(x) = (x+2)(x-3)(x-8)$

6) $V(x) = (x-3)^2 + x^2(x-3) = (x-3)(x^2+x-3)$

x^2+x-3 est un polynôme du 2^{nd} degré $a=1$, $b=1$, $c=-3$

$\Delta = 13$, $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

donc $V(x) = (x-3)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$

Ex 4.

$A = 3 \times \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = 3 \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2}{3} = 5$; $B = 12 - 2\sqrt{36} + 3$
$B = 12 - 12 + 3$
$B = 3$

$C = 9 \times 2 - (2 - 2\sqrt{2} + 1)$
$= 15 + 2\sqrt{2}$

$D = \dfrac{(1-2\sqrt{3}+3)(2+\sqrt{3})}{4-3} = 2$.
$D = 2$

Ex. 5.

$A = \dfrac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{x^2-1}$; $B = \dfrac{4-x^2}{x^2+3}$

$C = \dfrac{(2x-1)^2+3x}{2x-1} = \dfrac{4x^2-x+1}{2x-1}$

$D = \dfrac{3(\sqrt{x}+1)-2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$
$D = \dfrac{\sqrt{x}+5}{x-1}$

Ex. 6.

$A(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2+3} = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2+3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+3>0$

$A(x)$ est du signe de $4-x^2$
$4-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$
$\left.\begin{matrix} a=-1 \\ a<0 \end{matrix}\right)$ coeff. dominant.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe $A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$C(x) = \dfrac{2x-1-3(2x^2-1)}{2x^2-1} = \dfrac{-6x^2+2x+2}{2x^2-1}$

$2x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-6x^2+2x+2=0$: $\Delta=52$, $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$; $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$

$\simeq 0,77$ $\simeq -0,43$

x		$-\sqrt{2}/2$		$\frac{1-\sqrt{13}}{6}$		$\sqrt{2}/2$		$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$	$+\infty$
signe de $2x^2-1$ ($a=2$, $a>0$)	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
signe de $-6x^2+2x+2$ ($a=-6$, $a<0$)	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
signe de $C(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$

Ex. 7.

1) soit $M(x;y) \in \mathcal{C}_f$ et $M(x;y) \in (Ox)$.

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(x)=y$
$M(x;y) \in (Ox) \Leftrightarrow y=0$
$\}$ donc $f(x)=0$

On résout $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-12x+16=0.$

$\Delta=16$, $x_1=2$ et $x_2=4$

donc $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=4$.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des abscisses sont $(2;0)$ et $(4;0)$

soit $M(x;y) \in \mathcal{C}_f$ et $M(x;y) \in (Oy)$

$M(x;y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y=f(x)$
et $M(x;y) \in (Oy) \Leftrightarrow x=0$
$\}$ donc $y=f(0)$

$f(0)=16.$

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées est $(0;16)$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x) = 2x^2-12x+16-(2x+4)$
$= 2x^2-14x+12$

$\Delta=100$, $x_1=1$ et $x_2=6$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x)=2(x-1)(x-6)$

3) $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \Leftrightarrow f(x)=g(x)$
$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$
$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-6)=0$
$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=6$.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont :

$(1; f(1))$ et $(6; f(6))$ c.à.d $(1; 6)$ et $(6; 16)$

4) $\mathcal{C}_f$ en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)$.

Etudions le signe de $f(x) - g(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - g(x) = 2(x-1)(x-6)$

$f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; 1] \cup [6; +\infty[$

$f(x) - g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1; 6]$.

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[1; 6]$.

Ex. 8.

a). L'équation n'est définie que si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; -3; 0\}$
On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{-4; -3; 0\}$.

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{2x+7}{(x+3)(x+4)} = \frac{3}{x}$$
$$\Leftrightarrow x(2x+7) = 3(x+3)(x+4)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 7x = 3(x^2 + 7x + 12)$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 14x + 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -7 - \sqrt{13} \text{ ou } x = -7 + \sqrt{13}$$

b) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. On cherche les racines du trinôme $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2$.

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 12 - 8 = 4$.

$\Delta > 0$ donc ce trinôme admet 2 racines réelles distinctes
$$x_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2} = \sqrt{3} - 1 \ ; \ x_2 = \frac{2\sqrt{3} + 2}{2} = \sqrt{3} + 1$$

donc $S = \{\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1\}$

c) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une équation bicarrée.
On pose $X = x^2$.

L'équation devient $X^2 - 7X + 12 = 0$.
On cherche les racines de ce trinôme
$\Delta = 1$, $X_1 = 3$ et $X_2 = 4$

d'où $X_1 = x_1^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{3}$ ou $x_1 = \sqrt{3}$

$X_2 = x_2^2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = -2$ ou $x_2 = 2$

$S = \{-2; -\sqrt{3}; \sqrt{3}; 2\}$

2) L'inéquation n'est définie que si $x^2 - x - 2 \neq 0$.
On cherche donc les racines du trinôme $x^2 - x - 2$.
$\Delta = 9$, $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

L'inéquation n'est définie que si $x \neq -1$ et $x \neq 2$.
On résout l'inéquation sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 2\}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$
$\Delta = 9$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$.

On dresse le tableau de signes du quotient $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$.

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
signe de x^2+x-2 ($a=1$, $a>0$)	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
signe de x^2-x-2 ($a=1$, $a>0$)	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
signe du quotient	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow x \in \,]-2 ; -1[\, \cup \,]1 ; 2[$$

Ex. 9.

1) On calcule $f(-1/2) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times (-1/2) - 1$

$$= -\frac{4}{8} + \frac{2}{4} + 1 - 1 = 0$$

$-1/2$ est une racine du polynôme donc ce polynôme est factorisable par $\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Ainsi il existe un polynôme $Q(x)$ du second degré tel que

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \times Q(x) \quad \text{avec } Q(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1) \times (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)$$

$$= (2x+1) \times \left(\frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{2} b_1 x + \frac{1}{2} c_1\right)$$

$$= (2x+1) \times (a x^2 + b x + c) \quad \text{avec } a = \frac{1}{2} a_1,\ b = \frac{1}{2} b_1,\ c = \frac{1}{2} c_1$$

Déterminons les réels a, b et c.

$$4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (2x+1)(ax^2 + bx + c)$$
$$4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 2a x^3 + x^2(2b + a) + x(2c + b) + c.$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 4 = 2a \\ 2 = 2b + a \\ -2 = 2c + b \\ -1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $f(x) = (2x+1)(2x^2-1)$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \text{ ou } 2x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x^2=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \text{ ou } x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

2) a) $P(3)=3^3-5\times 9+5\times 3+3=0$

3 est donc une racine de P.
$P(x)$ est alors factorisable par $x-3$. Il existe donc un polynôme du second degré ax^2+bx+c tel que
$P(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$.

ainsi $x^3-5x^2+5x+3 = ax^3+x^2(-3a+b)+x(-3b+c)-3c$

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a=1 \\ -3a+b=-5 \\ -3b+c=5 \\ -3c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ c=-1 \\ b=-2 \end{array}$$

Ainsi $P(x)=(x-3)(x^2-2x-1)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
signe de $(x-3)$ $a=1$, $a>0$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de x^2-2x-1 $a=1$, $a>0$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) soit $P(x)=ax^2+bx+c$.

$P(1)=0$ et $P(2/3)=0$
donc 1 est une racine de P d'où $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$.
$P(2/3)=0$ donc $2/3$ est racine de P d'où $P(x)$ est factorisable par $(x-2/3)$

ainsi $P(x)=a(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

or $P(3)=14$ donc $14=a\times 2\times\left(3-\frac{2}{3}\right)$

$14=\frac{14}{3}a$ donc $a=3$.

donc $P(x)=3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)$

Ex. 10. $(E_m) : 2x^2 + (3m+1)x - m(m-1) = 0$

1) $\Delta_m = (3m+1)^2 - 4 \times 2 \times (-m)(m-1)$
$\Delta_m = 9m^2 + 6m + 1 + 8m(m-1)$
$\Delta_m = 17m^2 - 2m + 1$

2) (E_m) admet au moins une solution $\Leftrightarrow \Delta_m \geqslant 0$.

Etudions le signe du trinôme $17m^2 - 2m + 1$, $a = 17$
$b = -2$; $c = 1$

Δ'_m le discriminant associé : $\Delta'_m = 4 - 4 \times 17 \times 1 = -64$
$\Delta'_m < 0$ donc le trinôme est toujours du signe de $a = 17$, donc positif (strictement).

ainsi $\forall m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m > 0$ et (E_m) admet exactement 2 solutions

3) $P_m = \dfrac{-m(m-1)}{2}$

4) -2 est solution de $(E_m) \Leftrightarrow 2 \times (-2)^2 + (3m+1) \times (-2) - m(m-1) = 0$
$\Leftrightarrow 8 - 6m - 2 - m^2 + m = 0$
$\Leftrightarrow -m^2 - 5m + 6 = 0$

$\Delta = 49$ donc $m_1 = \dfrac{5-7}{-2} = 1$ ou $m_2 = \dfrac{5+7}{-2} = -6$

- si $m = 1$ alors $P_1 = -2 \times x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$
  les deux solutions sont 0 et -2.
- si $m = -6$ alors $P_{-6} = -2 \times x_2 = -21 \Leftrightarrow x_2 = +\dfrac{21}{2}$
  les deux solutions sont $\dfrac{21}{2}$ et -2.

Ex. 11.

1) $u_0 = 6$; $u_1 = \frac{1}{3} \times 6 - 2 = 0$; $u_2 = \frac{1}{3} \times 0 - 2 = -2$

$u_3 = \frac{1}{3} \times (-2) - 2 = -\frac{8}{3}$

$v_0 = u_0 + 3 = 9$; $v_1 = u_1 + 3 = 3$; $v_2 = u_2 + 3 = 1$; $v_3 = \frac{-8}{3} + 3 = \frac{1}{3}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 3$

$v_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2 + 3$

$v_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 1$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3} v_n.$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $v_0 = 9$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3^2}{3^n} = 3^{2-n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - 3 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 = 3^{2-n} - 3$.

4) u_7 est le $8^{ème}$ terme de la suite, $u_7 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 - 3 = \frac{-728}{243}$.

Ex. 12.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_{n+1}}$

$v_{n+1} = 1 + 2 \times \frac{2 + 3u_n}{2u_n}$

$v_{n+1} = 1 + \frac{2 + 3u_n}{u_n}$

$v_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n} = 4 + \frac{2}{u_n}$

$v_{n+1} = 3 + 1 + \frac{2}{u_n}$, or $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

$v_{n+1} = 3 + v_n$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de 1^{er} terme $v_0 = 1 + \frac{2}{u_0} = 1 + 2 = 3$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$

$v_n = 3 + 3n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3n \geq 0$ donc $3 + 3n \geq 3$.

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 1$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2}{u_n} = v_n - 1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{2} = \dfrac{1}{v_n - 1}$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{v_n - 1}$, avec $v_n \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 + 3n$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2 + 3n}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{2 + 3(n+1)} - \dfrac{2}{2 + 3n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3n + 5} - \frac{2}{3n + 2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(3n+2) - 2(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-6}{(3n+5)(3n+2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $3n + 5 > 0$ et $3n + 2 > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

(u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

4) a) $u_n < 0{,}01 \iff \dfrac{2}{2 + 3n} < 0{,}01$

$\iff \dfrac{2 + 3n}{2} > 100$) car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

$\iff 3n > 198$

$\iff n > \dfrac{198}{3}$

$\iff n > 66.$

Ainsi $n_0 = 67$ et $\forall n \geq n_0$, $u_n < 0{,}01$

b). $u_0 = 1$ donc l'algorithme 3 ne convient pas.
. on cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n < 0{,}01$. Donc la condition à vérifier est " $U \geq 0{,}01$ " donc l'algorithme 1 ne convient pas.

L'algorithme 2 est correct.

Ex 13.

1) $u_1 = \frac{3}{5} + 2 = \frac{13}{5}$; $u_2 = \frac{89}{25}$; $u_3 = \frac{517}{125}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + a$

$$v_{n+1} = \frac{3}{5} u_n + 2 + a$$

$$v_{n+1} = \frac{3}{5}\left(u_n + \frac{2+a}{3} \times 5\right)$$

(v_n) est géométrique $\Leftrightarrow a = \frac{5(2+a)}{3}$

$$\Leftrightarrow 3a = 10 + 5a$$

$$\Leftrightarrow a = -5$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 5 = -4$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 5$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 5 = -4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = v_0 + \dots + v_n$

$$T_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$T_n = -4 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}}$$

$$T_n = -10\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right)$$

6) $S_n = u_0 + \dots + u_n$

$S_n = v_0 + 5 + v_1 + 5 + \dots + v_n + 5$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 5 + 5 + \dots + 5$

$S_n = T_n + (n+1) \times 5$

$S_n = -10 + 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 5n + 5$

$S_n = -5 + 5n + 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$

Ex 14.

1) $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

. $u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; $u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

or $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

. $\frac{u_1}{u_0} = \frac{1/2}{-1} = -1/2$; $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3/4}{1/2} = \frac{3}{2}$

or $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

c) (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$

$w_{n+1} = \frac{v_n}{1/2\, v_n} + \frac{u_n}{v_n}$

$w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2 + w_n$

d) (w_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de 1er terme $w_0 = -1$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$.

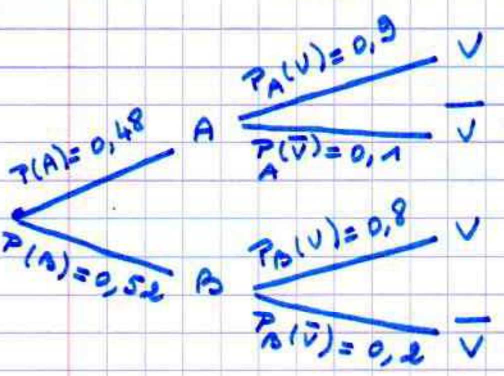
4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n \times v_n$

$$u_n = (2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

<u>Ex. 15.</u>

1)



2) a) A et B sont des événements qui forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$$
$$P(V) = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V)$$
$$P(V) = 0,48 \times 0,9 + 0,52 \times 0,8$$
$$P(V) = 0,848$$

b) $P_V(A) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(V)} = \dfrac{P(A) \times P_A(V)}{P(V)} = \dfrac{0,48 \times 0,9}{0,848} = \dfrac{27}{53}$

$P_V(A) \simeq 0,509$ à 10^{-3} près.

3) D " la personne choisie vote pour le candidat A ".

$$P(D) = P(A \cap V) + P(B \cap \overline{V})$$
$$P(D) = P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(\overline{V})$$

$$P(D) = 0,48 \times 0,9 + 0,52 \times 0,2$$
$$P(D) = 0,536$$

<u>Ex. 16.</u>

1) $P(M) = 0,01$; $P_M(T) = 0,9$; $P_{\overline{M}}(T) = 0,05$

2) a) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,01 \times 0,9 = 0,009$

$P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = (1 - 0,01) \times 0,05 = 0,0495$

b) $\overline{M}$ et $\overline{M}$ sont des événements formant une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$
$$P(T) = 0,009 + 0,0495 = 0,0585 = \frac{117}{2000}$$

3) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}0585} = \dfrac{2}{13}$

4) $P_T(\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0495}{0{,}0585} = \dfrac{11}{13}$

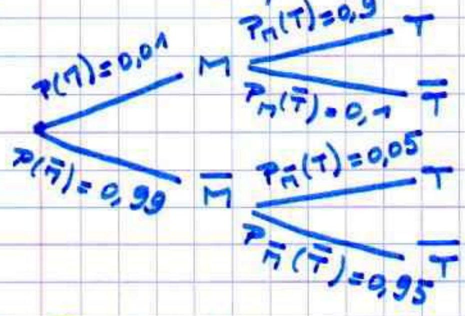
ou $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M)$

5) $P_{\overline{T}}(M) = \dfrac{P(M \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{P(M) \times P_M(\overline{T})}{1 - P(T)}$

$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M) \times (1 - P_M(T))}{1 - P(T)}$$

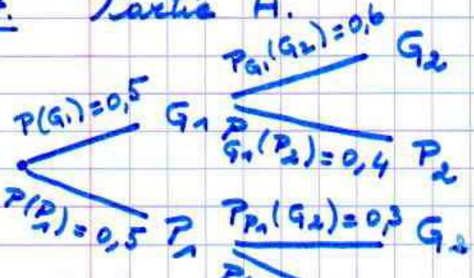
$$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0{,}01 \times (1 - 0{,}9)}{1 - 0{,}0585} = \frac{2}{1883}.$$

la situation représentée par un arbre :



<u>Ex. 17.</u> Partie A.

1)



$P(G_1) = 0{,}5$

$P_{G_1}(G_2) = 0{,}6$

$P_{P_1}(G_2) = 1 - P_{P_1}(P_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Les événements G_1 et P_1 forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(P_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(P_1) \times P_{P_1}(G_2)$$

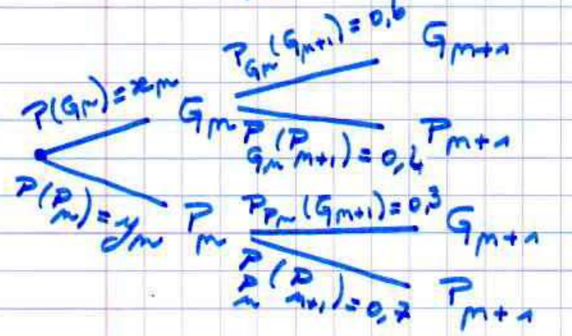
$$P(G_2) = \frac{1}{2} \times 0{,}6 + \frac{1}{2} \times 0{,}3 = 0{,}45$$

2) $P(P_2) = 1 - P(G_2) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$

Partie B.

1) D'après l'énoncé, $P_{G_n}(P_{n+1}) = 1 - P_{G_n}(G_{n+1}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$P_{P_n}(G_{n+1}) = 1 - P_{P_n}(P_{n+1}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$



G_n et P_n sont deux événements qui forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap P_n)$

$x_{n+1} = P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P(P_n) \times P_{P_n}(G_{n+1})$

$x_{n+1} = 0{,}6 \times x_n + y_n \times 0{,}3$

$P(P_{n+1}) = P(G_n \cap P_{n+1}) + P(P_n \cap P_{n+1})$

$y_{n+1} = P(G_n) \times P_{G_n}(P_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1})$

$y_{n+1} = x_n \times 0{,}4 + y_n \times 0{,}7$

Ainsi, on obtient : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}6\, x_n + 0{,}3\, y_n \\ y_{n+1} = 0{,}4\, x_n + 0{,}7\, y_n \end{cases}$

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = v_n$.

(v_n) est donc une suite constante de terme général égal à 1 $\left(v_1 = x_1 + y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \right)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = 4x_{n+1} - 3y_{n+1}$

$w_{n+1} = 2{,}4\, x_n + 1{,}2\, y_n - 1{,}2\, x_n - 2{,}1\, y_n$

$w_{n+1} = 1{,}2\, x_n - 0{,}9\, y_n$

$w_{n+1} = 0{,}3\,(4x_n - 3y_n)$

$w_{n+1} = 0{,}3\, w_n.$

Ainsi (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}3$ et de 1er terme $w_1 = 4x_1 - 3y_1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = w_1 \times q^{n-1}$
$w_n = \frac{1}{2} \times 0{,}3^{n-1}$

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} v_n = x_n + y_n & L_1 \\ w_n = 4x_n - 3y_n & L_2 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3v_n = 3x_n + 3y_n & L_1 \leftarrow 3L_1 \\ w_n = 4x_n - 3y_n & L_2 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3v_n + w_n = 7x_n & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ v_n = x_n + y_n \end{cases}$

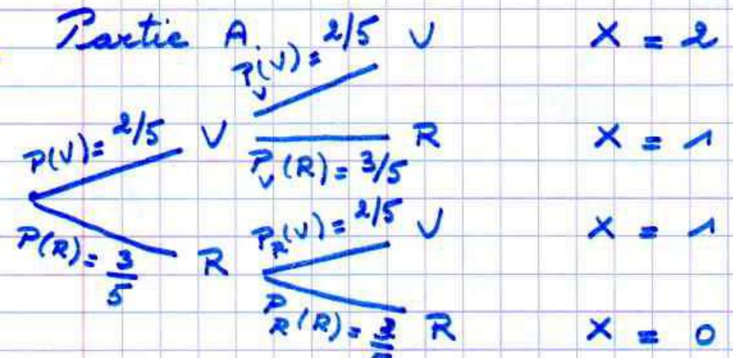
$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \frac{1}{7}(3v_n + w_n) \\ y_n = v_n - x_n = \frac{4}{7}v_n - \frac{1}{7}w_n. \end{cases}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{1}{7}(3v_n + w_n)$
$x_n = \frac{1}{7}\left(3 + \frac{1}{2} \times 0{,}3^{n-1}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{4}{7}v_n - \frac{1}{7}w_n$
$y_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} \times 0{,}3^{n-1}$
$y_n = \frac{4}{7} - \frac{1}{14} \times 0{,}3^{n-1}$

<u>Ex. 18.</u> Partie A.

1)



$P(X=0) = P(R \cap R) = P(R) \times P_R(R) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$P(X=1) = P(V \cap R) + P(R \cap V)$
$= P(V) \times P_V(R) + P(R) \times P_R(V)$
$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$
$= \frac{12}{25}$

$P(X=2) = P(V \cap V) = P(V) \times P_V(V) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant:

$X = a_i$	0	1	2
$P(X = a_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{21}$

⚠ $E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$.

2) $E(X) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$

$E(X) = \frac{12}{25} + 2 \times \frac{4}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,8$

3) a) $Y = 2 \times X - 3$

b) $E(Y) = 2 \times E(X) - 3 = 1,6 - 3 = -1,4$

$E(Y) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.
Il perd, en moyenne, 1,4 € par partie.

c) $E(Y) = 0 \iff a\,E(X) - 3 = 0$
$\iff a \times 0,8 - 3 = 0$
$\iff a = \frac{3}{0,8} = 3,75$

Le jeu est équitable si à chaque boule verte tirée, on gagne 3,75 €.

<u>Autre méthode</u> : sans utiliser $E(aX+b) = a\,E(X) + b$.
qui est au programme de terminale.

b) On écrit la loi de probabilité de Y : $Y = 2X - 3$

$Y = a_i$	-3	-1	1
$P(Y = a_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(Y) = -3 \times \frac{9}{25} - 1 \times \frac{12}{25} + 1 \times \frac{4}{25} = -\frac{7}{5} = -1,4$.

c) On écrit la loi de probabilité de Y : $Y = aX - 3$.

$Y = a_i$	-3	$a-3$	$2a-3$
$P(Y = a_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(Y) = -3 \times \frac{9}{25} + (a-3) \times \frac{12}{25} + (2a-3) \times \frac{4}{25}$

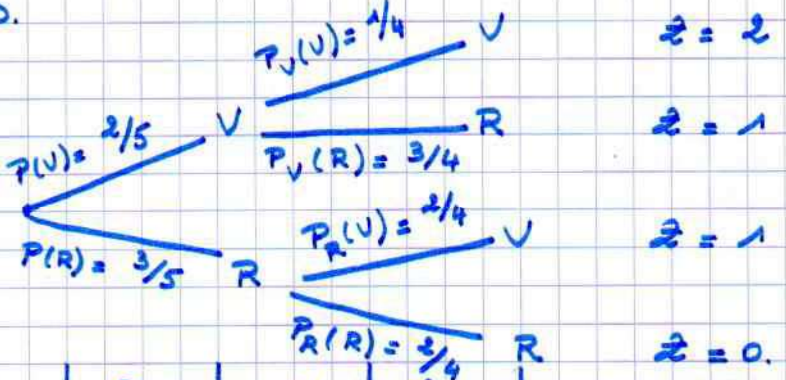
$= -\frac{75}{25} + \frac{20}{25}a = -3 + \frac{4}{5}a$

$E(Y) = 0 \iff -3 + \frac{4}{5}a = 0$

$\iff \frac{4}{5}a = 3$

$\iff a = \frac{15}{4} = 3,75$.

Partie B.



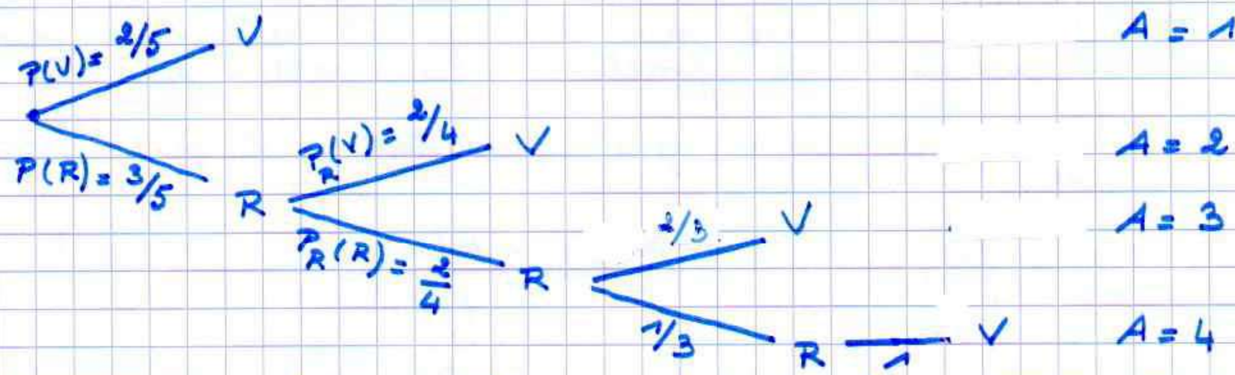
$Z = a_i$	0	1	2
$P(Z = a_i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$

$P(Z=0) = P(R \cap R) = P(R) \times P_R(R) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P(V \cap R) + P(R \cap V) \\ &= P(V) \times P_V(R) + P(R) \times P_R(V) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \\ &= \frac{12}{20} \end{aligned}$$

$P(Z=2) = P(V \cap V) = P(V) \times P_V(V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$

Partie C.



$A = a_i$	1	2	3	4
$P(A = a_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{6}{60}$

$P(A=1) = \frac{2}{5}$

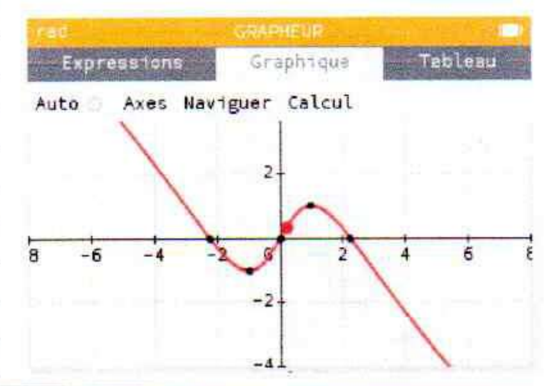
$P(A=2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P(A=3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

$P(A=4) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

Ex. 19.

1) a) D'après le graphique de la calculatrice, on peut conjecturer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
f semble donc impaire



b) . $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$ est centré en 0).

. $f(-x) = \dfrac{-(-x)^3 + 5x(-x)}{(-x)^2+3} = \dfrac{-(-x^3) - 5x}{x^2+3} = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2+3}$

$= -\left(\dfrac{-x^3 + 5x}{x^2+3}\right) = -f(x)$

donc f est bien impaire.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(-3x^2+5)(x^2+3) - (-x^3+5x)(2x)}{(x^2+3)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-3x^4 - 4x^2 + 15 + 2x^4 - 10x^2}{(x^2+3)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-x^4 - 14x^2 + 15}{(x^2+3)^2}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+15)(1-x^2) = x^2 - x^4 + 15 - 15x^2$
$= -x^4 - 14x^2 + 15$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2+15)(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$

3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 15 > 0$ et $(x^2+3)^2 > 0$.

$f'(x)$ est donc du même signe que le trinôme $1-x^2$.

or $\forall x \in [-1;1]$, $1-x^2 \geq 0$

et $\forall x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$, $1-x^2 \leq 0$.

$\left| \begin{array}{l} a=-1 \\ a<0 \\ \text{signe de } a \\ \text{à l'extérieur des racines.} \end{array} \right.$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f.		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

4) a) l'équation réduite de T_0:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = \frac{15}{9}x + 0$$

$$y = \frac{5}{3}x$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - \frac{5}{3}x = \frac{-x^3+5x}{x^2+3} - \frac{5}{3}x$

$$f(x) - \frac{5}{3}x = \frac{-3x^3+15x-5x^3-15x}{3(x^2+3)}$$

$$f(x) - \frac{5}{3}x = \frac{-8x^3}{3(x^2+3)}$$

$\forall x \in]-\infty;0]$, $x^3 \leq 0$ donc $-x^3 \geq 0$

$\forall x \in [0;+\infty[$ $x^3 \geq 0$ donc $-x^3 \leq 0$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $3(x^2+3) > 0$

D'où $\forall x \in]-\infty;0]$, $f(x) - \frac{5}{3}x \geq 0$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $f(x) - \frac{5}{3} \leq 0$.

c) sur $]-\infty;0]$, C_f est au dessus de T_0.

sur $[0;+\infty[$, C_f est en dessous de T_0.

pour $x=0$, C_f et T_0 sont sécantes.

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax(x^2+3)+bx}{x^2+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^3 + x(3a+b)}{x^2+3}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-x^3+5x}{x^2+3}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{-x^3+5x}{x^2+3} = \dfrac{ax^3 + x(3a+b)}{x^2+3}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-x^3+5x = ax^3 + x(3a+b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a \\ 5 = 3a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \end{cases}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x + \dfrac{8x}{x^2+3}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x) = \dfrac{8x}{x^2+3}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $8x \geq 0$, donc $f(x) - (-x) \geq 0$

$\forall x \in]-\infty;0]$, $8x \leq 0$, donc $f(x) - (-x) \leq 0$.

ainsi, sur $]-\infty;0]$, $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{D}$.

sur $[0;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $\mathcal{D}$.

c).

x	10	100	1000	10 000
$\dfrac{8x}{x^2+3}$	0,7767	0,0780	0,0080	0,0008

Il semble que $\mathcal{C}_f$ se rapproche de plus en plus de $\mathcal{D}$ pour des valeurs de x de plus en plus grandes.

6). On résout $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 5) = 0$$

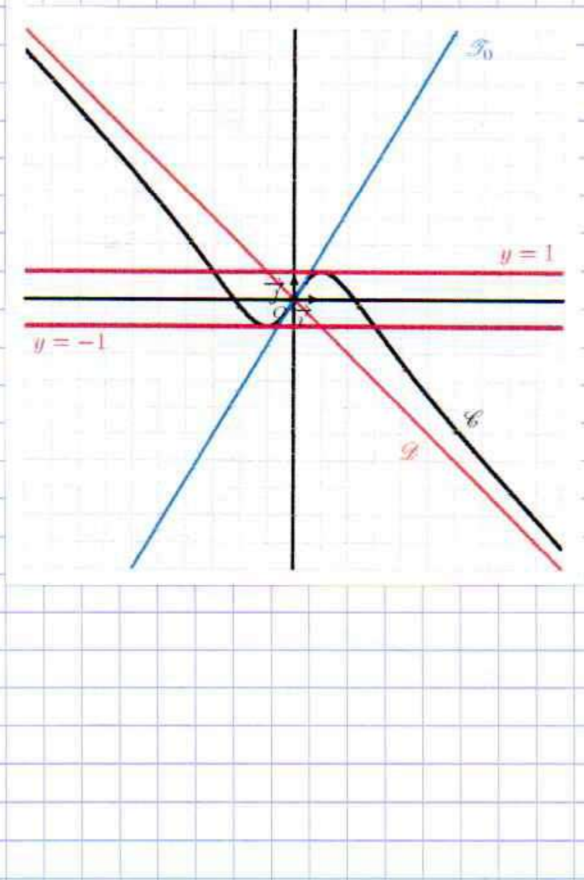
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{5} \text{ ou } x = \sqrt{5}$$

Donc, les points d'intersection avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées :

$$(0\,;0)\,;\,(-\sqrt{5}\,;0)\,;\,(\sqrt{5}\,;0)$$

7). On obtient :



Ex. 20.

1) f est définie sur $[0;+\infty[$. $\mathcal{D}=[0;+\infty[$.

2) On calcule : $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\dfrac{2/3\times h\times\sqrt{h}}{h}=\dfrac{2}{3}\sqrt{h}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{3}\sqrt{h}=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

3) $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ avec $f'(0)=0$ et $f(0)=0$.
$y=0$

4) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

De plus, f est dérivable en 0.

Donc f est dérivable sur $\mathcal{D}=[0;+\infty[$.

$\forall x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

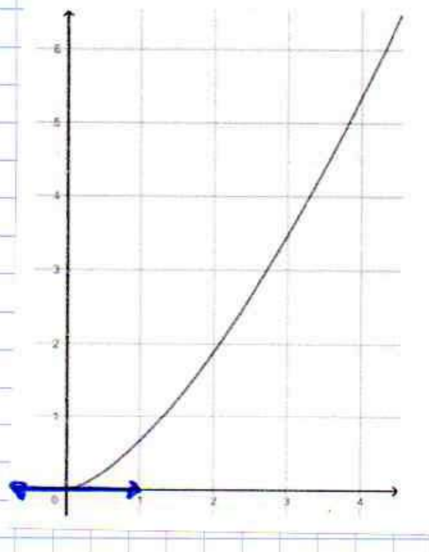
$f'(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\sqrt{x}=\sqrt{x}$

De plus $f'(0)=0$ et $\sqrt{0}=0$ donc $f'(0)=\sqrt{0}=0$.

On a $\forall x\in[0;+\infty[$, $f'(x)=\sqrt{x}$.

5).

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe $f'(x)$	$+$
variations de f	0 $\nearrow$



Ex. 21. a) f est définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{x} + xe^{x} + 3$

b) h est définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)\times(-2)e^{-2x}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = e^{-2x}\left(2 - 4x - 2\right)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -4xe^{-2x}$

Ex. 22.

a) $e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^{0} \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$

b) $e^{3x-1-(4x+4)} = e^{-x+2} \Leftrightarrow e^{-x-5} = e^{-x+2}$

$\Leftrightarrow -x-5 = -x+2$

$\Leftrightarrow -5 = 2$ impossible $\quad S = \phi$

c) $e^{x^2} = e^{x-3} \Leftrightarrow x^2 = x-3$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$

On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times3 = 1-12 = -11$

$\Delta < 0$

donc l'équation n'admet pas de solution réelle

donc $S = \phi$.

e) $xe^{2x+1} = x \Leftrightarrow xe^{2x+1} - x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(e^{2x+1} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{2x+1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{2x+1} = e^{0}$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $2x+1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$

donc $S = \left\{-\frac{1}{2} ; 0\right\}$

f) On pose $X = e^{x}$. $e^{2x} = (e^{x})^2 = X^2$

L'équation devient : $X^2 + 2X - 3 = 0$

On a $\Delta = 4 - 4\times1\times(-3) = 16$

$\Delta > 0$, l'équation a donc 2 solutions distinctes réelles.

$X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

on revient alors $e^x = -3$ et $e^x = 1$

impossible $\qquad x = 0$

donc $S = \{0\}$

c) $e^{-x^2-3x+5} \geq e \iff -x^2-3x+5 \geq 1.$

$\iff -x^2-3x+4 \geq 0.$

On détermine le signe du trinôme $-x^2-3x+4$

On a : $\Delta = 9-4\times(-1)\times 4 = 9+16 = 25$

$\Delta > 0$, le trinôme a 2 racines distinctes réelles,

$x_1 = \dfrac{3-5}{-2} = 1$; $x_2 = \dfrac{3+5}{-2} = -4.$

le trinôme est du signe du coefficient dominant $a = -1$, à l'extérieur des racines.

donc $\forall x \in]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$, $-x^2-3x+4 < 0$

et $\forall x \in]-4; 1[$, $-x^2-3x+4 > 0$

d'où $S =]-4; 1[.$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$-x^2-3x+4$ $a=-1$, $a<0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ex. 23.

1) a) g est définie sur $\mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x - 1.$

b) $g'(x) \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0$

$\iff e^x \geq 1$

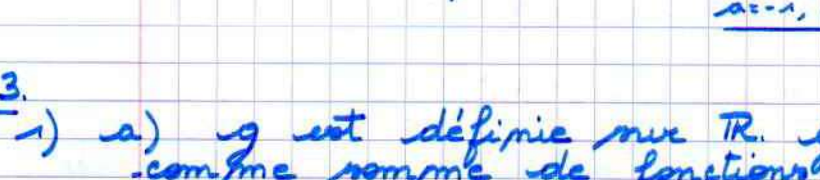
$\iff e^x \geq e^0$

$\iff x \geq 0.$

Donc g est croissante sur $[0; +\infty[$

et g est décroissante sur $]-\infty; 0]$

Le tableau de variations est :



$g(0) = e^0 + 1 = 2$

c) g admet un minimum en 0, égal à 2.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 2 > 0$

g est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) a) f est définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 0 + e^{-x} - xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) + 1$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) + e^{-x} \times e^{x}$

$f'(x) = e^{-x}(1 - x + e^{x})$

$f'(x) = e^{-x} g(x)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$

d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 2(x-0) + 1$

$y = 2x + 1$

Ex. 24. 1) a) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

b) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

or $\sin(x) = \frac{2}{3}$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

donc $\cos(x) = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ ou $\cos(x) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

or $x \in [0; \pi/2]$ donc $\cos x \geqslant 0$

d'où $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3) $(\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2$

$= \cos^2(x) + 2\cos x \sin x + \sin^2(x) + \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2(x)$

$= 1 + 1 = 2.$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2.$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x))(\cos^2(x) + \sin^2(x))$

$= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \times 1$

$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(5\pi + x) = \sin(4\pi + \pi + x)$

$= \sin(\pi + x)$ car la fonction sin est 2π-périodique.

$= -\sin(x)$

ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) - \sin(5\pi + x) = -\cos x + \sin x$.

5) a) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

$S = \left\{ -\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6} \right\}$

b) $2\sin x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{-\pi}{3} \end{cases}$

$S = \left\{ -\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3} \right\}$

c) $\begin{cases} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 2x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases}$

⚠

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x \in]-\pi; \pi] \end{cases}$

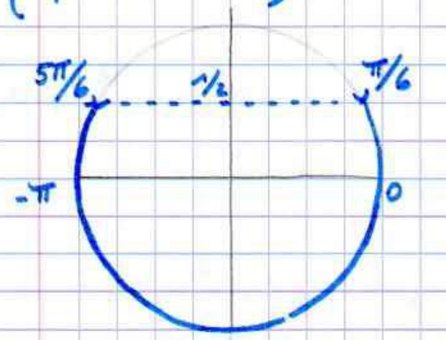
On prend les valeurs de k :
$k=0$, $k=-1$; $k=1$

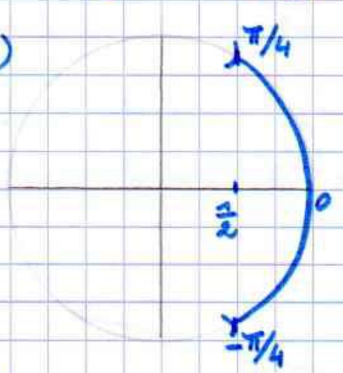
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \\ \text{ou } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ x \in]-\pi ; \pi] \end{cases}$$

donc $S = \left\{ -\frac{2\pi}{3} ; 0 ; \frac{\pi}{3} ; \pi \right\}$

6) a) $\begin{cases} \cos x > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in]-\pi ; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in]-\pi ; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right[$

b) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ x \in]-\pi ; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-\pi ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \pi\right]$

b) 

a) 

Ex. 25.

1) f n'est définie que si $2 + \cos x \neq 0$
or $\cos x \in [-1 ; 1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc $2 + (-1) \leq 2 + \cos x \leq 2 + 1$
$1 \leq 2 + \cos x \leq 3$
ainsi, $2 + \cos x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}$, $2 + \cos x \neq 0$.

f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$. , $\mathbb{R}$ est centré en 0.

$f(-x) = \frac{2}{2 + \cos(-x)} = \frac{2}{2 + \cos x} = f(x)$. car la fonction cos est paire.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

donc f est paire.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.

$f(x + 2\pi) = \frac{2}{2 + \cos(x + 2\pi)}$

$= \frac{2}{2 + \cos x}$ car la fonction cos est 2π-périodique.

$= f(x)$. Donc f est 2π-périodique.

f est 2π-périodique donc on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π : $[-\pi\,;\pi]$
de plus f est paire donc on peut l'étudier sur $[0;\pi]$ et on complètera sur $[-\pi;0]$ par symétrie d'axe (Oy)

Le plus petit intervalle d'étude de f est $[0;\pi]$.

On obtiendra $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi;0]$ en faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis sur $[\pi;2\pi]$... en faisant des translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = \frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{-2\times(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\sin x}{(2+\cos x)^2}$.

$\forall x \in [0;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ et $(2+\cos x)^2 > 0$

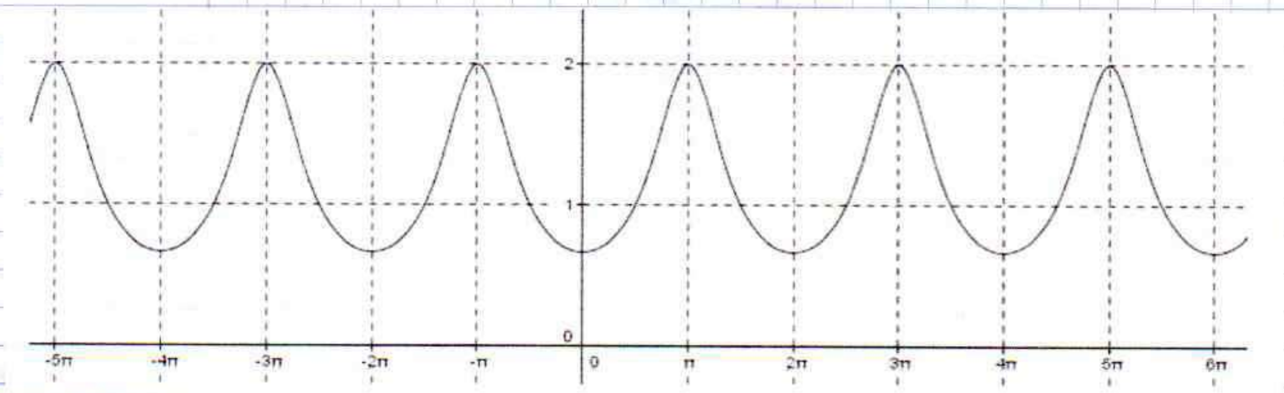
donc $\forall x \in [0;\pi]$ $f'(x) > 0$

4).

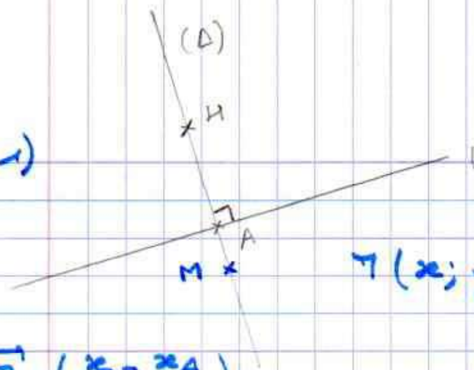
x	0		π
variations de f	$2/3$	$\nearrow$	2

$f(0) = \frac{2}{3}$

$f(\pi) = \frac{2}{1} = 2$



Ex. 26. 1)



soit $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

$M(x;y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{n})=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 1\\ y-3 & 2\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-3)-(y-3)=0$

$\Leftrightarrow 2x-y-3=0$

Une équation cartésienne de (Δ) est : $2x-y-3=0$

2) $H \in (\Delta)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de Δ : $2x_H - y_H - 3 = 0$

$H\begin{pmatrix}x_H\\y_H\end{pmatrix}$

$H \in \mathcal{D}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{D}$:
$x_H + 2y_H - 4 = 0$

On résout le système :

$$(S)\begin{cases} x_H + 2y_H - 4 = 0 & L_1 \\ 2x_H - y_H - 3 = 0. & L_2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_H - 4y_H + 8 = 0 & L_1 \leftarrow -2L_1 \\ 2x_H - y_H - 3 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -5y_H + 5 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x_H - y_H - 3 = 0 & L_2. \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = 1 \\ 2x_H = 3 + y_H = 4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y_H = 1 \\ x_H = 2 \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont $(2;1)$.

Ex. 27.

1) $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AB]$ donc (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5+1 \\ 3-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

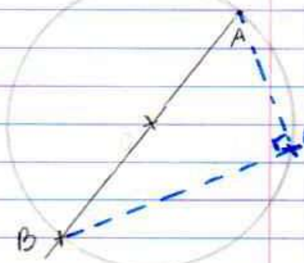
I milieu de $[AB]$ appartient à $\mathcal{D}$. $I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$I(2 ; 5/2)$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\iff x_{\overrightarrow{IM}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{IM}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 0$$
$$\iff (x-2)\times 6 + \left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$
$$\iff 6x - 12 + y - \frac{5}{2} = 0$$
$$\iff y = -6x + \frac{29}{2}$$

L'équation réduite de $\mathcal{D}$ est : $y = -6x + \frac{29}{2}$.

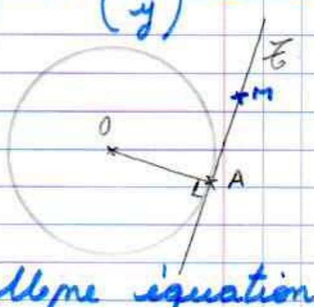
2) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



$$\iff x_{\overrightarrow{MA}} \times x_{\overrightarrow{MB}} + y_{\overrightarrow{MA}} \times y_{\overrightarrow{MB}} = 0$$
$$\iff (-1-x)\times(5-x) + (2-y)\times(3-y) = 0$$
$$\iff -5 + x - 5x + x^2 + 6 - 2y - 3y + y^2 = 0$$
$$\iff x^2 - 4x + y^2 - 5y + 1 = 0$$
$$\iff (x-2)^2 - 4 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = 0$$
$$\iff (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = 0$$
$$\iff (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

$\mathcal{C}$ a pour sentre $I\left(2 ; \frac{5}{2}\right)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{37}}{2}$

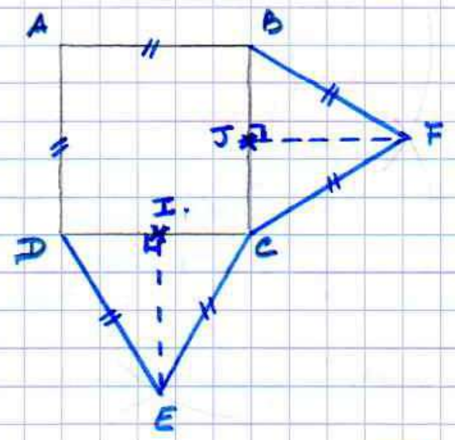
3) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$



$$\iff x_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\overrightarrow{OA}} + y_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\overrightarrow{OA}} = 0$$
$$\iff (x+1)\times(-1) + (y-2)\times 2 = 0$$
$$\iff -x - 1 + 2y - 4 = 0$$
$$\iff -x + 2y - 5 = 0.$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ est : $-x + 2y - 5 = 0$.

Ex. 28.



1) a) ABCD est un carré donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont perpendiculaires. et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$.
donc $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé.

b) Dans $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ on a $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc $C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

- soit I le milieu de [DC] donc $I\begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$

dans le triangle DCE équilatéral, on a (IE) perpendiculaire à (DC)
ainsi dans le triangle DEI rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :

$$DE^2 = DI^2 + IE^2$$
$$DE^2 = \frac{DE^2}{4} + IE^2$$
$$IE^2 = \frac{3}{4} DE^2$$

or $IE > 0$, $IE = \frac{\sqrt{3}}{2} DE$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IE}$$
$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{donc } E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

- Soit J le milieu de [BC]

dans le triangle BFJ rectangle en J, d'après le théorème de Pythagore :

$$BF^2 = BJ^2 + JF^2$$
$$BF^2 = \frac{BF^2}{4} + JF^2$$
$$JF^2 = \frac{3}{4} BF^2$$

or $JF > 0$, $JF = \frac{\sqrt{3}}{2} BF$.

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JF}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \text{donc } F\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

c) $(BE) \perp (AF) \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

on a $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AF} = x_{\overrightarrow{BE}} \times x_{\overrightarrow{AF}} + y_{\overrightarrow{BE}} \times y_{\overrightarrow{AF}}$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 0$$

donc (BE) et (AF) sont perpendiculaires.

Ex. 29.

2) a) Dans le triangle DAE rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AE^2 = AD^2 + DE^2$$
$$= 1 + 1 = 2$$

or $AE > 0$ donc $AE = \sqrt{2}$

Dans le triangle ECB rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$EB^2 = EC^2 + CB^2$$
$$= 4 + 1 = 5$$

or $EB > 0$ donc $EB = \sqrt{5}$.

b) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = EA \times EB \times \cos(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EB})$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \cos(\widehat{AEB})$$

$$= \sqrt{10} \times \cos(\widehat{AEB})$$

3) a) Dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DE})$ on a :

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = x_{\overrightarrow{EA}} \times x_{\overrightarrow{EB}} + y_{\overrightarrow{EA}} \times y_{\overrightarrow{EB}}$ ← dans un repère orthonormé.

$$= 1 \times 1 + (-1) \times 2 = -1.$$

4) On a alors $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \sqrt{10} \times \cos(\widehat{AEB})$

et $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -1$

donc $\sqrt{10} \times \cos(\widehat{AEB}) = -1$

donc $\cos(\widehat{AEB}) = \frac{-1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

donc $\widehat{AEB} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$\widehat{AEB} = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$\widehat{AEB} \simeq 1{,}89$ rad

Ex. 30. 1) $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 2$

$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \frac{MB^2}{MA^2} = 4$

$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow MB^2 = 4\,MA^2$

$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow MB^2 - 4\,MA^2 = 0$

2) $M\binom{x}{y} \in \mathscr{E} \Leftrightarrow (x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 - 4\left((x_A - x)^2 + (y_A - y)\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2-x)^2 + (-1-y)^2 - 4\left[(1-x)^2 + (2-y)^2\right] = 0$

$\Leftrightarrow 4 + x^2 - 4x + 1 + y^2 + 2y - 4\left[1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2\right]$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 3y^2 + 4x + 18y - 15 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 6y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-3)^2 - \frac{40}{9} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{\sqrt{40}}{3}\right)^2$

3) $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{2}{3}; 3\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{40}}{3}$

$= \frac{2\sqrt{10}}{3}$