Première-Terminale

Option Mathématiques Complémentaires

Mathématiques Spécifiques

Ce livret s'appuie sur les attendus du programme de l'option Mathématiques Complémentaires.
Il a été conçu pour vous aider à aborder cette option : en partant des notions vues en Seconde et en Première, il vous apporte des rappels et des compléments de cours indispensables, qui sont suivis d'exemples ou exercices corrigés, ainsi que d'exercices pour vous entraîner. Aidez-vous du cours, ainsi que des cartes mentales présente à la fin des chapitres, pour résoudre ces exercices.

Vous trouverez les corrigés des différents exercices en fin de livret. Pour un travail réellement efficace, utilisez-les seulement après avoir bien réfléchi à chaque exercice.

Gardez ce livret pendant toute l'année de Terminale, afin de pouvoir vous y reporter en cas de besoin.

Bonnes vacances !

Suites

Sens de variation d'une suite

Une suite (u_n) est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on compare u_n et u_{n+1} pour un entier n quelconque.

Exemple 1 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = -n^2 + 1$, pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = -n^2 + 1$ et $u_{n+1} = -(n+1)^2 + 1$

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 1 + n^2 - 1 = -(n^2 + 2n + 1) + n^2 = -2n - 1$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$, d'où : $u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Exemple 2 :

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$, pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = v_n + 2n + 1 - v_n = 2n + 1$. Or $2n + 1 > 0$.

Or $2n + 1 > 0$. Donc $v_{n+1} > v_n$

La suite (v_n) est donc strictement croissante.

Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est dite arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
La constante r est appelée la raison de cette suite.

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Forme explicite

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r :

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$

Pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$

Complément : Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exemple : Montrer qu'une suite est arithmétique.

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = -3n + 7$.

Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 7 - (-3n + 7) = -3n - 3 + 7 + 3n - 7 = -3$

Cette suite est donc une suite arithmétique de raison -3. Son premier terme est $u_0 = -3 \times 0 + 7 = 7$.

Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$.
La constante q est appelée la raison de cette suite.

Forme explicite

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q :

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 . q^n$

Pour tous entiers naturels n et p, on a : $u_n = u_p . q^{n-p}$

Complément : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple : Montrer qu'une suite est géométrique.

Soit (v_n) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = 2 \times 3^n$.

Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = 3v_n$

Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3. Son premier terme est $v_0 = 2 \times 3^0 = 2$.

A vous de jouer !

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - 5$.
Etudier le sens de variation de cette suite.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 1$ pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^2 - 2v_n$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3.
2. Cette suite est-elle monotone ?

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -5$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, puis calculer u_{10}.
2. Calculer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.

Exercice 4

Soit (v_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$.

1. Exprimer v_n en fonction de n, puis calculer v_{10}.
2. Calculer la somme $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{10}$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2. Justifier que (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 1$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.

Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :
- Un premier terme : u_0 ou u_p
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ avec r raison de (u_n).

(ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)

2) Une suite **est** arithmétique de raison r ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$

3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :

$$\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r} \text{ ou } \boldsymbol{u_n = u_p + (n - p) \times r}$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Pour montrer qu'une suite est arithmétique

On montre que la différence des deux termes consécutifs, $u_{n+1} - u_n$ est constante et vaut r

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :
- Un premier terme : v_0 ou v_p
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n \times q$ avec q raison de (v_n).

(ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)

2) Une suite **est** géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :

$$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n} \text{ ou } \boldsymbol{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls.
On montre par exemple que :

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Pour montrer qu'une suite est géométrique

- On calcule v_{n+1}
- On factorise v_{n+1} pour faire apparaître, le terme $q \times v_n$

Suites

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:

$$(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to u_n$$

- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme+dernier terme}}{2}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

(si $q \neq 1$)

- Somme des n premières puissances de q :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Variations d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

- La suite (u_n) est dite croissante si pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite décroissante si pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.
- La suite (u_n) est dite constante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$

Pour démontrer la monotonie d'une suite (u_n) :

- On calcule $u_{n+1} - u_n$
- On factorise si besoin
- On détermine le signe de cette différence

Fonctions de référence

Fonctions affines

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

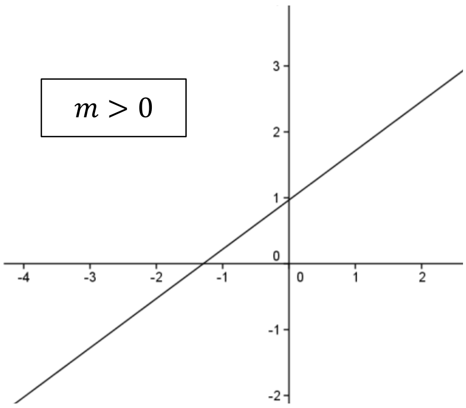
Si $m > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

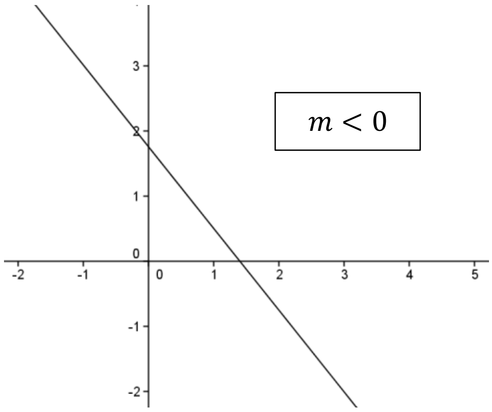
Si $m < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Signe de $mx + p$:

$$mx + p = 0 \Leftrightarrow mx = -p \Leftrightarrow x = -\frac{p}{m}$$





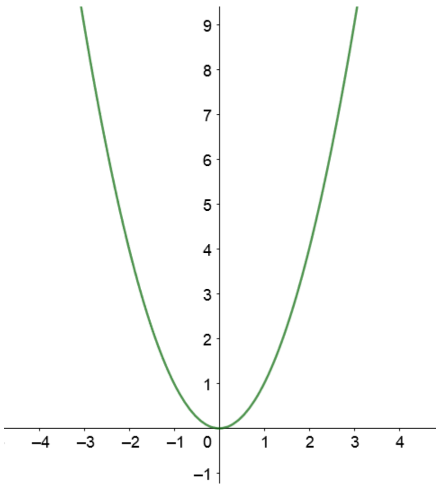
x	-∞		$-\frac{p}{m}$		+∞
$mx + p$		$-$	0	$+$	

x	-∞		$-\frac{p}{m}$		+∞
$mx + p$		$+$	0	$-$	

Fonction carré

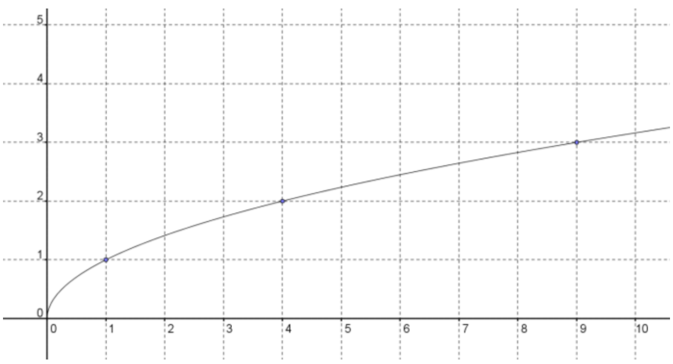
La courbe de la fonction carré est une parabole, de sommet l'origine du repère. Elle a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

La fonction carré est strictement décroissante sur]−∞ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; +∞[.



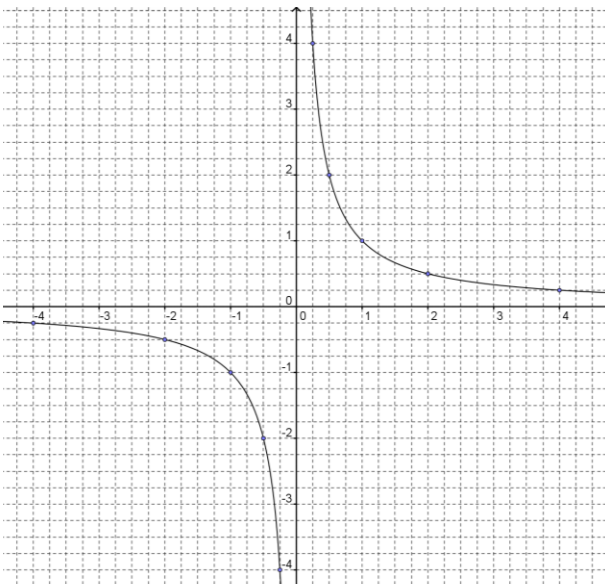
Fonction racine carrée

La courbe représentative de la fonction racine carrée dans un repère est une demi-parabole, dont le sommet est l'origine. La fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; +∞[.



Fonction inverse

La courbe de la fonction inverse est une **hyperbole**.
Elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.



La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.

A vous de jouer !

Exercice 1

A l'aide des courbes représentatives et des propriétés des fonctions usuelles, choisir la seule réponse correcte à chaque question :

1. L'équation $x^2 = 9$ a pour solution(s) dans $\mathbb{R}$:

a. 81 **b.** 81 et -81 **c.** 3 **d.** 3 et -3

2. Dans $\mathbb{R}, x^2 > 4$ équivaut à :

a. $x > 16$ **b.** $x > 2$ **c.** $x > 2\ ou\ x < -2$

3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 3$ est :

a. $]-\infty; 9[$ **b.** $]0; 9[$ **c.** $[0; 9[$ d. $[0; \sqrt{3}[$

4. La fonction inverse est :

a. décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ **b.** décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$

Exercice 2

Résoudre graphiquement (utiliser les courbes rappelées ci-dessus) les équations ou inéquations suivantes :

a. $\frac{1}{x} = 2$ **b.** $\frac{1}{x} < 2$ **c.** $x^2 = 5$ d. $x^2 \geq 5$

Exercice 3

On veut déterminer un encadrement de l'expression pour $x \in [-2; -1]$

$$A = \frac{1}{5 - x^2}$$

Compléter et justifier les étapes suivantes :

$-2 \leq x \leq -1$ donc $\ldots \leq x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq -x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq 5 - x^2 \leq \cdots$ car ………………

donc $\ldots \leq \frac{1}{5-x^2} \leq \cdots$ car ………………

Second degré

Vocabulaire

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré si et seulement si il existe trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

L'expression $ax^2 + bx + c$ est aussi appelée trinôme.

On appelle racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Propriété : Forme canonique

Pour tout trinôme $ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

La forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique du trinôme.

Dans un repère orthogonal, la fonction f est représentée par une parabole de sommet $S(\alpha; \beta)$, qui admet comme axe de symétrie la droite d'équation $y = \alpha$.

Racines d'un trinôme ; forme factorisée ; signe du trinôme

Soit l'équation $x^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$, d'inconnue réelle x.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$: ce nombre Δ est appelé le **discriminant** du trinôme.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Le trinôme ne peut pas se factoriser en produit de facteurs du premier degré.
$ax^2 + bx + c$ ne s'annule jamais et a le même signe que le nombre a.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Le trinôme se factorise : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$
$ax^2 + bx + c$ est du signe de a, et s'annule seulement lorsque $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Le trinôme se factorise : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines.
Son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré suivantes, étudier le signe de chaque trinôme et donner sa forme factorisée si elle existe :

(E_1) $-x^2 - 3x + 10 = 0$ (E_2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$ (E_3) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

Pour l'équation (E_1) : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 10 = 49$.
$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{3-7}{-2} = 2$ et $x_2 = \frac{3+7}{-2} = -5$

$$-x^2 - 3x + 10 = -(x - 2)(x + 5)$$

Comme $a = -1$, le signe de ce trinôme est le suivant :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$-x^2 - 3x + 10$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour l'équation (E_2) : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8$.
$\Delta < 0$, donc l'équation n'a aucune solution. Le trinôme $3x^2 - 4x + 2$ ne se factorise pas, et son signe est toujours strictement positif (car $a = 3$)

Pour l'équation (E_3) : $\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{9}{4} = 0$, donc l'équation a une unique solution : $\alpha = \frac{-3}{2}$.

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

Ce trinôme est toujours supérieur ou égal à 0.

Remarque

Pour déterminer les racines d'un trinôme, on calcule son discriminant, si c'est nécessaire. Cependant, dans certains cas, lorsqu'on sait facilement factoriser le trinôme, il est possible de trouver ses racines sans calculer son discriminant :

$3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ donc ce trinôme a deux racines : 0 et $\frac{2}{3}$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3)$ donc ce trinôme a deux racines $\frac{3}{2}$ et $-\frac{3}{2}$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 = (x + 2)^2$ donc ce trinôme a une seule racine : -2

A vous de jouer !

Exercice 1

Soit le trinôme $h(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Choisir la seule réponse correcte à chaque question.

1. Son discriminant Δ est :

a. 4 **b.** 7 **c.** 16

2. Ses racines sont :

a. $-\frac{2}{3}$ et 2 **b.** $-\frac{1}{3}$ et 1 **c.** -1 et $\frac{1}{3}$

3. Sous forme factorisée, $h(x)$ est égal à :

a. $(x - 1)(3x + 1)$ **b.** $(x + 1)(3x - 1)$ **c.** $(3x - 1)(x - 1)$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$ **b)** $x^2 - 3x + 3 = 0$ **c)** $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Exercice 3

1) Etudier le signe du trinôme $5x^2 - 3x - 2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 10x + \frac{25}{2} \geq 0$ **b)** $-2x^2 - 9x + 5 < 0$

Exercice 4

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x^2 - x - 4$, et représentée par une parabole notée P.

1) Déterminer les racines de $h(x)$. En déduire sa forme factorisée.

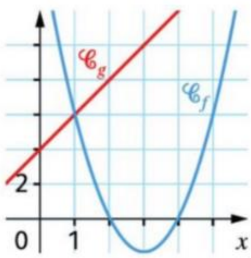
2) Préciser les coordonnées des points d'intersection de la parabole P avec l'axe des abscisses.

Exercice 5

Déterminer l'expression de la fonction polynôme du second degré g, représentée par la parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et 6 et qui passe par le point C(7; −4).

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et $g(x) = 2x + 4$



Leurs représentations graphiques C_f et C_g sont données ci-contre.

1) Justifier que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2x^2 - 14x + 12$, puis déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction de x.

2) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de C_f et C_g.

3) Déterminer l'intervalle sur lequel C_f est en-dessous de C_g.

Trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels et $a \neq 0$

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Forme canonique du trinôme f

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad et\ \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Racines du polynôme $f(x)$ ou solutions de $f(x) = 0$

* $\Delta > 0$: $f(x)$ *a deux racines*: $\boldsymbol{x_1} = \dfrac{\boldsymbol{-b+\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}$ *et* $\boldsymbol{x_2} = \dfrac{\boldsymbol{-b-\sqrt{\Delta}}}{\boldsymbol{2a}}$
* $\Delta = 0$: $f(x)$ *a une racine double* $\boldsymbol{x_0} = \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$
* $\Delta < 0$: $f(x)$ *n'a pas de racine réelle*

Variations du trinôme f

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	β	↗

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	β	↘

Forme factorisée du trinôme f

* $\Delta > 0$: $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
* $\Delta = 0$: $f(x) = a(x-x_0)^2$
* $\Delta < 0$: $f(x)$ *n'est pas factorisable*

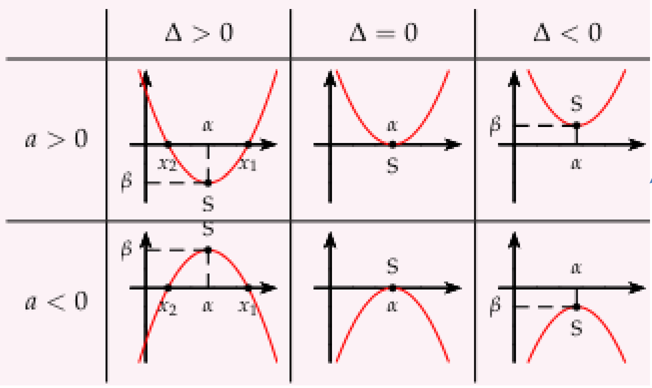
Signe du trinôme f

* $\Delta > 0$: le trinôme est du signe de $\boldsymbol{a}$ « à l'extérieur » des racines

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	0	$-a$	0	a	

* $\Delta = 0$: Le trinôme est du signe de $\boldsymbol{a}$ et s'annule en $\boldsymbol{\alpha = x_0}$
* $\Delta < 0$: le trinôme est du signe de $\boldsymbol{a}$

Représentations



Dérivation

Nombre dérivé. Tangente

Lorsque la courbe d'une fonction f admet au point d'abscisse a une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées, on dit que f est dérivable en a.

Le coefficient directeur de cette tangente est appelé le nombre dérivé de f en a.

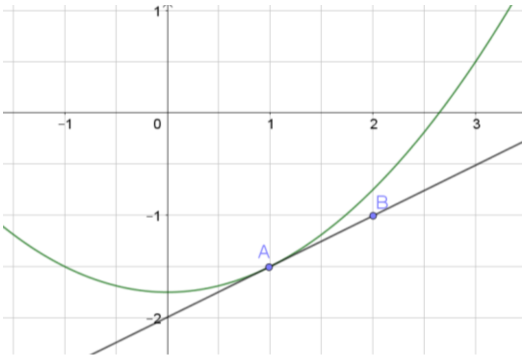
On le note $f'(a)$.

Equation réduite de la tangente

Soit f une fonction dérivable en un réel a.
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple



On considère la fonction f représentée ci-contre. Sa courbe admet au point A, d'abscisse 1, une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées. Donc f est dérivable en 1.

Le coefficient directeur de cette tangente est

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - (-1{,}5)}{2 - 1} = 0{,}5$$

Donc $f'(1) = 0{,}5$

Cette tangente a pour équation réduite :

$$y = f'(1).(x - 1) + f(1)$$

Soit : $y = 0{,}5(x - 1) - 1{,}5$

Ou encore en développant : $y = 0{,}5x - 2$

Fonction dérivée

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.
Si en tout nombre x de l'intervalle I, f est dérivable, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I.
On peut alors définir une fonction qui à tout nombre x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$.
Cette fonction est appelée la fonction dérivée de f sur I. On la note f'.

Dérivées des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, on donne différentes fonctions usuelles, dérivables sur un intervalle I et l'expression de leur dérivée :

$f(x)$	$f'(x)$	Sur l'intervalle I
k (constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$ (avec a et b des réels)	a	$\mathbb{R}$
x^n (avec n entier naturel non nul)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Dérivées et opérations

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et si k est un réel, alors les fonctions $u+v$, ku et $u.v$ sont aussi dérivables sur I.

Si de plus, v ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I.

On a alors, pour tout $x \in$ I,

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$
$$(ku)'(x) = k\,u'(x)$$
$$(u.v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Si g est dérivable sur un intervalle J, alors la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur l'intervalle I constitué des réels x de J tels que $ax+b \in J$, et $f'(x) = ag'(ax+b)$.

Exemples

Déterminer la dérivée des fonctions définies ci-dessous, sur l'intervalle précisé :

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x} \text{ sur }]0;+\infty[\quad ; \quad g(x) = 5\sqrt{x} \text{ sur }]0;+\infty[\quad ; \quad h(x) = (x^2-1)(2x+3) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad l(x) = \frac{2x+1}{x-3} \text{ sur }]3;+\infty[\quad ; \quad m(x) = \sqrt{2x+1} \text{ sur } \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$f(x) = u(x) + v(x)$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. On a : $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc : $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$

$g(x) = ku(x)$ avec $k = 5$ et $u(x) = \sqrt{x}$. On a : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc : $g'(x) = ku'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

$h(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = 2x+3$. On a : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$

$h'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(2x+3) + 2(x^2-1) = 4x^2 + 6x + 2x^2 - 2 = 6x^2 + 6x - 2$

$k(x) = \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = x^2 + 1$. On a : $v'(x) = 2x$

Donc : $k'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$l(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = x-3$. On a : $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$

Donc : $l'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}$

$m(x) = g(ax+b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}, a = 2, b = 1$. On a : $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

Donc : $m'(x) = ag'(ax+b) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Dérivée et sens de variation d'une fonction

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I.

f est croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$
f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$

Plus précisément :

Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I. Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 3$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire $f'(3)$ et l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.
3. Etudier le signe de $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f.

1. $f'(x) = 2x - 1$

2. On a donc : $f'(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$
De plus, $f(3) = 3^2 - 3 + 3 = 9$
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$
Soit : $y = 5(x-3) + 9$
En développant, on obtient l'équation : $y = 5x - 6$

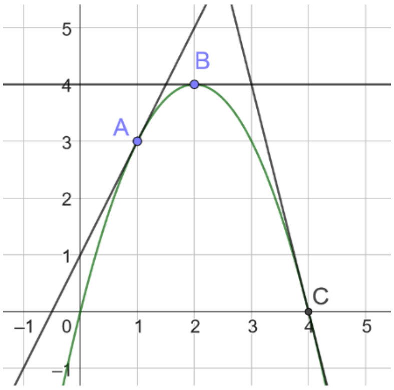
3. $f'(x) = 2x - 1$ Etudions le signe de $2x - 1$:

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

D'où le tableau de signe, ainsi que le sens de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{11}{4}$	↗	

A vous de jouer !



Exercice 1

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f, ainsi que les tangentes aux points A, B et C, d'abscisses respectives 1, 2 et 4.
Déterminer $f'(1), f'(2)$ et $f'(4)$.

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous, sur l'intervalle indiqué :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5 \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad g(x) = (3x+1)(2x^2 - x) \text{ sur } \mathbb{R} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{2x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$k(x) = \frac{5x+1}{x^2+3} \text{ sur } \mathbb{R} \,; \quad l(x) = \sqrt{3x+6} \text{ sur }]-2;+\infty[$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.

1. Déterminer f', la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$, et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f admet-t-elle un maximum ou un minimum ? si oui, lequel ?

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

1. Déterminer f', la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$, et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Un prestataire de service gère les actions financières d'un grand groupe. Le coût moyen de gestion dépend du nombre d'actions gérées. Ce coût est donné, en centaines d'euros, par la fonction g définie sur]0 ; 8] par :

$$g(x) = 0{,}25x^2 - 1{,}5x + 5{,}5$$

où x est le nombre d'actions gérées, exprimé en milliers.

1. Déterminer g', la fonction dérivée de g sur]0 ; 8].
2. Etudier le signe de $g'(x)$, et en déduire les variations de f sur]0 ; 8].
3. Pour quel nombre d'actions gérées le coût moyen est-il minimum ? Quel est alors ce coût ?

Dérivation :
Point de vue local : dérivabilité en un réel a

La fonction $\boldsymbol{f}$ **est dérivable en** $\boldsymbol{a}$ si la courbe de f admet au point d'abscisse $\boldsymbol{a}$ une **tangente** non parallèle à l'axe des ordonnées.

Le **coefficient directeur** de cette tangente est alors appelé **le nombre dérivé** de f en a, et se note $\boldsymbol{f'(a)}$.

Equation réduite de cette tangente :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Dérivation :
Point de vue global : dérivabilité sur un intervalle I

Si la fonction f est dérivable en tout réel a de l'intervalle I, alors on dit que f est dérivable sur I

On appelle fonction dérivée de f sur I, notée f' , la fonction définie sur I par :

$$x \longmapsto f'(x)$$

Calcul de la fonction dérivée de f :

Si f est une fonction de référence

définie par	dérivable sur	a pour dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = x^n$avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ si $n \leq -1$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si f est une somme, un produit, un quotient de fonctions de référence, ou une composée avec une fonction affine

$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
$(g(ax+b))' = a \times g'(ax+b)$

Application de la dérivation
Etudier les variations de $\boldsymbol{f}$

Comment ?

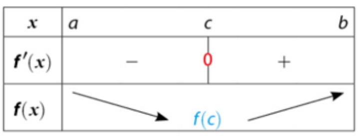
1. On commence par déterminer si la fonction est dérivable sur l'intervalle I.
2. On calcule l'expression de $f'(x)$
3. On détermine le signe de $f'(x)$ en fonction de $\boldsymbol{x \in I}$

Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ sur I alors f est constante sur I

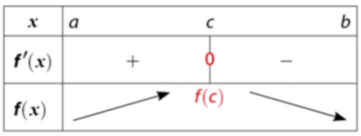
Si $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ sur I alors f est croissante sur I

Si $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ sur I alors f est décroissante sur I

Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ pour $\boldsymbol{x = c}$ en changeant de signe
Alors f admet un extremum local en c



$f(c)$ est un **minimum local**.



$f(c)$ est un **maximum local**.

Fonction exponentielle

Propriété - Définition

Il existe une seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est appelée la fonction exponentielle, et est notée exp.

Autre notation

L'image de 1 par la fonction exp est un nombre réel strictement positif, noté e. $\exp(1) =$. $e \approx 2{,}718$

La fonction exponentielle exp est la fonction exponentielle de base e. Pour tout réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.

Propriétés algébriques

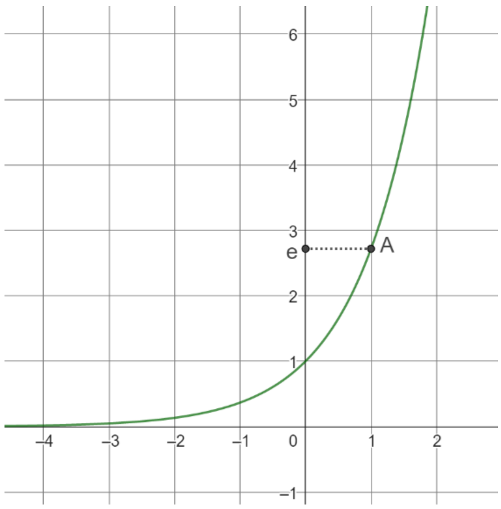
$\mathrm{e}^0 = 1$ $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$

Pour tous réels x, y, et pour tout entier n,

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \qquad (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$$

Etude de la fonction exp

- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$
- Cette fonction est égale à sa dérivée :
  Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$
- Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est donnée ci-contre.
- Toute fonction u définie par $u(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $u'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$



Exemple 1 :

Simplifier les expressions :

$A = \mathrm{e}^{3x+3} \times (\mathrm{e}^{-x})^2$ $\qquad B = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-3x+1}}$

$A = \mathrm{e}^{3x+3} \times (\mathrm{e}^{-x})^2 = \mathrm{e}^{3x+3} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{3x+3-2x} = \mathrm{e}^{x+3}$

$B = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-3x+1}} = \mathrm{e}^{-x-(-3x+1)} = \mathrm{e}^{-x+3x-1} = \mathrm{e}^{2x-1}$

Exemple 2 :

Résoudre les équations ou inéquations :

$\mathrm{e}^{2x-1} = 1$ $\qquad \mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{-2x}$ $\qquad \mathrm{e}^{2x+1} < \mathrm{e}^2$

Pour résoudre une équation ou inéquation de ce type, on la met sous la forme $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B$ ou $\mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B$, puis on utilise les propriétés suivantes, conséquences de la stricte monotonie de la fonction exp :

Pour deux nombres A et B quelconques : $\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^B \Leftrightarrow A = B$ $\qquad \mathrm{e}^A < \mathrm{e}^B \Leftrightarrow A < B$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x-1} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ Cette équation a une solution : $\frac{1}{2}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow x + 1 = -2x \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ Cette équation a une solution : $-\frac{1}{3}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{2x+1} < \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow 2x + 1 < 2 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

Exemple 3 :

On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de leur dérivée :

$f(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2 + 4x - 1$; $g(x) = \mathrm{e}^x(2x - 1)$; $h(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$.

La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = -3x^2 + 4x - 1$. On a alors : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = -3 \times 2x + 4 = -6x + 4$
Donc $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \mathrm{e}^x - 6x + 4$

La fonction g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 2x - 1$. On a alors : $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 2$
Donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \mathrm{e}^x(2x - 1) + 2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2x - 1 + 2) = \mathrm{e}^x(2x + 1)$

$h(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a = -2, b = 3$ donc $h'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b} = -2\mathrm{e}^{-2x+3}$

Exemple 4 :

Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$:

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. On va calculer sa dérivée et étudier le signe de cette dérivée.
Pour tout réel x, $= \mathrm{e}^x - 1$.

$$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x > 0$$

D'où le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

A vous de jouer !

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \mathrm{e}^{x-3} \times \mathrm{e}^{2+4x}$; $B = (\mathrm{e}^x)^3 \times \mathrm{e}^{-3x}$; $C = \frac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\mathrm{e}^{x-1}}$.

Exercice 2

Résoudre les équations ou inéquations :

$$\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{x-1} \quad ; \quad \mathrm{e}^{3x-2} \geq 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{4x-6} < \mathrm{e}^{-2} .$$

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous, sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 3\mathrm{e}^x + 5x^2 \quad ; \quad g(x) = (5x - 8)\mathrm{e}^x \quad ; \quad h(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}$$

Exercice 4

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 3)\mathrm{e}^x$

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau de variation de f.

Exercice 5

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 9x + 19)\mathrm{e}^x$

1. Vérifier que pour tout réel x, $g'(x) = (x^2 - 7x + 10)\mathrm{e}^x$.
2. Etudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$. (Penser à étudier le signe du trinôme $x^2 - 7x + 10$.)
3. En déduire le tableau de variation de g.

Propriétés

Pour tous réels x, y

- $\boldsymbol{e^0 = 1}$
- $e^1 = e$
- $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^n = e^{n \times x}$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\boldsymbol{e^x > 0}$

Définition

f est dérivable sur $\mathbb{R}$,
$f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ par
$\boldsymbol{f(x) = e^x}$

Dérivation

$\boldsymbol{f(x) = e^x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$

Fonction exponentielle

Pour résoudre des équations

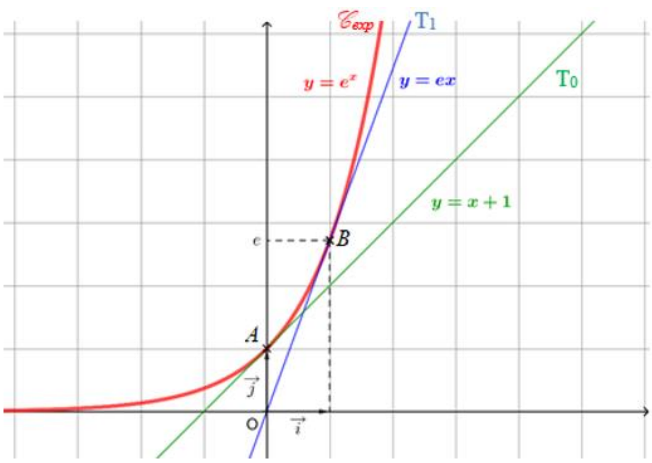
Pour tous réels a, b
$\boldsymbol{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$

Pour résoudre des inéquations

Pour tous réels a, b
$\boldsymbol{e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b}$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$	$\nearrow$	1	e	$\nearrow$



Probabilités conditionnelles

On considère une expérience aléatoire, dont l'univers est noté Ω, sur lequel on définit une loi de probabilité P, ainsi que deux événements A et B de cet univers, de probabilités non nulles.

Définition

La probabilité conditionnelle de B sachant A se note $P_A(B)$ et est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

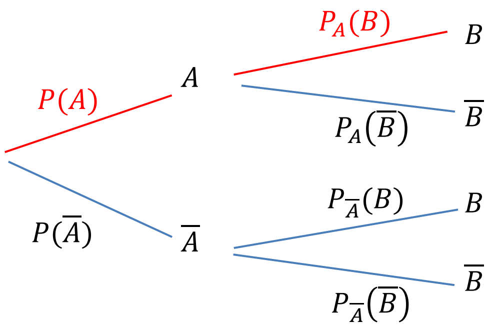
En pratique, cette probabilité est souvent donnée par l'énoncé, ou on peut la calculer à partir d'un tableau croisé d'effectifs :

En situation d'équiprobabilité, $P_A(B) = \frac{nb\ d'issues\ de\ A\cap B}{nb\ d'issues\ de\ A}$

Autre utilisation de cette formule

Elle permet de calculer $P(A \cap B)$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

L'emploi de cette formule est facilité par la représentation de la situation sous forme d'un arbre de probabilités :



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{9}{20} \times \frac{5}{18} = \frac{1}{8}$

Loi des probabilités totales

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Evénements indépendants

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P_A(B) = P(B)$,

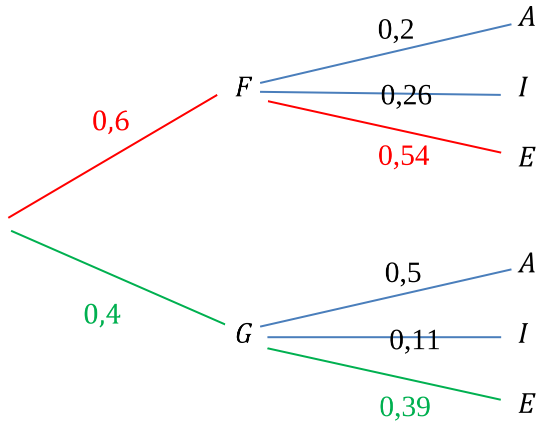
ou encore, lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple 1

On s'intéresse aux élèves d'un lycée qui ont pris une option LV3, qui peut être soit allemand, soit italien, soit espagnol : 60% sont des filles. Parmi les filles, 20% ont pris l'option LV3 allemand, et 26% l'option LV3 italien. Parmi les garçons, 50% ont pris l'option LV3 allemand et 11% l'option LV3 italien. On choisit au hasard un ou une élève ayant pris une option LV3. On note les événements :

F : « L'élève est une fille »
G : « L'élève est un garçon »
A : « L'élève a pris LV3 allemand »
I : « L'élève a pris LV3 italien »
E : « L'élève a pris LV3 espagnol »
Déterminer la probabilité que l'élève choisi fasse LV3 espagnol.

D'après l'énoncé : $P(F) = 0{,}6$ et $P(G) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
$P_F(A) = 0{,}2$, $P_F(I) = 0{,}26$, donc $P_F(E) = 1 - 0{,}2 - 0{,}26 = 0{,}54$
$P_G(A) = 0{,}5$, $P_G(I) = 0{,}11$, donc $P_G(E) = 1 - 0{,}5 - 0{,}11 = 0{,}39$
On peut donc construire l'arbre suivant :



Calcul de $P(F \cap E)$: $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0{,}6 \times 0{,}54 = 0{,}324$

Calcul de $P(G \cap E)$: $P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E) = 0{,}4 \times 0{,}39 = 0{,}156$

Calcul de $P(E)$: D'après la loi des probabilités totales,

$$P(E) = P(F \cap E) + P(G \cap E) = 0{,}324 + 0{,}156 = 0{,}48$$

Exemple 2

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On considère les événements :

A : « on obtient un numéro supérieur ou égal à 3 »

B : « on obtient un numéro pair ».

Ces deux événements sont-ils indépendants ?

$A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A \cap B = \{4, 6\}$

On est en situation d'équiprobabilité (dé équilibré) donc

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} = P(A \cap B)$ donc A et B sont indépendants.

Autre méthode : $P_A(B) = \frac{nb\ d'issues\ de\ A \cap B}{nb\ d'issues\ de\ A} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(B)$ donc A et B sont indépendants.

A vous de jouer !

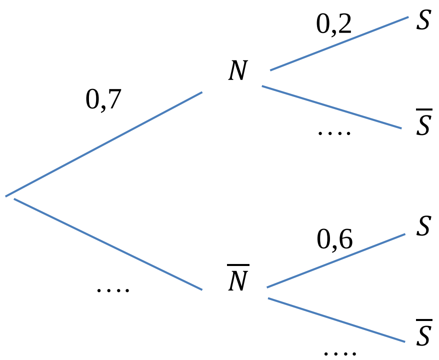
Exercice 1

Un hebdomadaire propose deux types d'abonnements : un abonnement numérique et un abonnement papier. On ne peut choisir que l'un des deux abonnements. Les abonnés ont la possibilité de souscrire à un abonnement complémentaire pour recevoir un supplément.

On choisit un abonné au hasard, et note N l'événement « être abonné numérique » et S l'événement « être abonné au supplément ».

L'arbre ci-contre traduit la situation.

1. Déterminer la probabilité que l'abonné ait choisi un abonnement papier.
2. A quelle probabilité correspond le nombre 0,2 ?
3. Calculer $P(N \cap S)$.
4. Compéter l'arbre pondéré.
5. En déduire la probabilité d'être abonné au supplément.

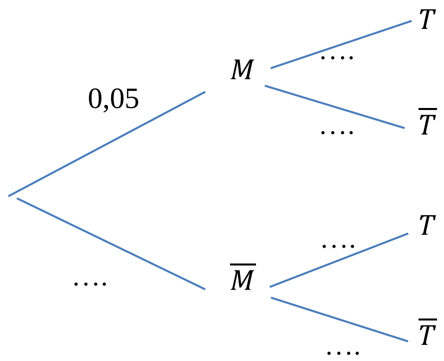


Exercice 2

Une maladie touche 5 % de la population d'un pays. Un test de dépistage permet de détecter cette maladie afin de pouvoir la traiter. Ce test est très fiable : lorsqu'elles sont testées, 99 % des personnes malades ont un test positif, et 99 % des personnes non atteintes par la maladie ont un test négatif.

Une personne est choisie au hasard dans la population du pays. On note M l'événement « La personne choisie est atteinte par la maladie » et T l'événement « La personne choisie a un test positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré suivant à l'aide de l'énoncé.



2. Calculer les probabilités suivantes : $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$.

3. En déduire la probabilité $P(T)$.

4. La personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte par la maladie ?

Exercice 3

Un service après-vente a constaté que parmi les retours d'un appareil, 30% présentent une panne A, 40% présentent une panne B, et 3% présentent simultanément les deux pannes A et B.
On choisit au hasard l'un des appareils. On note A l'événement « l'appareil présente la panne A » et B l'événement « l'appareil présente la panne B ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Propriété :

Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
Si $P(B) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

Définition :
La probabilité de B sachant A
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Indépendance :

A et B indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Les probabilités conditionnelles

Propriété : probabilités totales

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω (leur réunion est Ω et ils sont deux à deux disjoints) :
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$
$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$

Variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire, dont l'univers est noté Ω.

Définition

Définir une variable aléatoire X sur Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel. (X est donc une fonction de Ω dans ℝ.)

Exemple :

On lance un dé équilibré à 6 faces. L'univers est : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
La règle du jeu est la suivante :
Si le lancer donne comme résultat 6, le joueur gagne 6 €.
Si le lancer donne 1 ou 2 ou 3, le joueur perd 4 €.
Sinon, il gagne 2 €.
On a ainsi défini une variable aléatoire G, qui à chaque issue de 1 à 6, associe le gain algébrique du joueur en euros.
La variable aléatoire G prend ses valeurs dans l'ensemble {-4 ; 2 ; 6}.

{G = −4} est l'événement {1 ; 2 ; 3} (le joueur perd 4 € s'il obtient 1, 2, ou 3)
De même : {G = 2} est l'événement {4 ; 5}   {G = 6} est l'événement {6}
{G > 0} est l'événement {4 ; 5 ; 6}

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω, et prenant un nombre fini de valeurs : x_1, x_2, …, x_n.

Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur x_i, pour i entier entre 1 et n, la probabilité de l'événement {X = x_i}.
(Attention : La somme des probabilités de tous ces événements est égale à 1.)

Exemple:

Avec le jeu précédent : comme le dé est équilibré, les 6 issues sont équiprobables.
P(G = 6) = P({6}) = $\frac{1}{6}$
P(G = −4) = P({1 ; 2 ; 3}) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
P(G = 2) = P({4 ; 5}) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

On présente souvent alors les résultats sous forme d'un tableau :

Valeurs g_i	-4	2	6
$P(G = g_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω, prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n.
On note $p_i = P(X = x_i)$ pour tout entier i entre 1 et n.
L'espérance de X est le nombre défini par : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$

E(X) s'interprète comme la valeur moyenne prise par X lorsqu'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

Exemple :

$$E(G) = -4 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{-12+4+6}{6} = -\frac{1}{3}$$

E(G) < 0, donc ce jeu est défavorable au joueur.

Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent :

Variance : $\mathrm{V(X)} = p_1\left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - \mathrm{E(X)}\right)^2$

Ecart-type : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

La variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de l'espérance.

Exemple :

$$\mathrm{V(G)} = \frac{3}{6} \times \left(-4 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{6} \times \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(6 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3 \times 121 + 2 \times 49 + 361}{6 \times 9}$$

$$\mathrm{V(G)} = \frac{822}{54} = \frac{137}{9}$$

donc $\sigma(\mathrm{G}) = \frac{\sqrt{137}}{3} \cong 3{,}9$

A vous de jouer !

Exercice 1

Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton dans une urne. Celle-ci contient 7 jetons sur lesquels figure la valeur du gain : 1 jeton permet de gagner 20 €, 2 jetons permettent de gagner 10 €, et 4 jetons permettent de gagner 5 €.

L'univers est l'ensemble des 7 jetons, tous équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire qui prend la valeur du gain associé au jeton.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire G, qui donne le gain à un jeu.

a	-5	-4	0	1	2	3	4
$P(G = a)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1

Ce jeu est-il équitable (ni favorable, ni défavorable au joueur) ?

Exercice 3

On lance deux dés équilibrés à quatre faces, numérotées de 1 à 4. On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres obtenus, ou à leur valeur commune.

1. Compléter le tableau suivant, qui recense les valeurs de X pour toutes les issues.

1er dé / 2ème dé	1	2	3	4
1	1	2		
2	2	2		
3				
4				

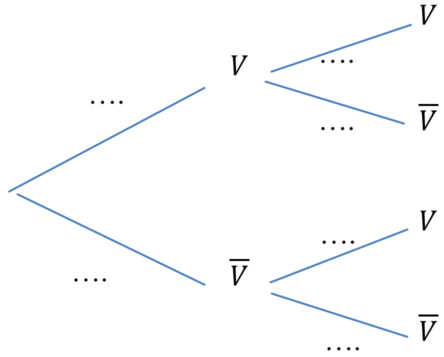
2. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 4

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

On tire successivement deux boules en remettant la première boule dans l'urne après le premier tirage.
Pour chaque tirage, on note V l'événement « la boule tirée est verte ».

1. Compléter l'arbre de probabilités qui représente les deux tirages successifs.



2. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules vertes, puis la probabilité de n'obtenir aucune boule verte.
3. Un joueur mise 2€. Il gagne 2€ par boule verte tirée. On note Y la variable aléatoire égale au bénéfice du joueur.

   a. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

   c. Déterminer l'espérance de Y. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Les variables aléatoires

Définition :
Une variable aléatoire X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire

Loi de probabilité :

Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chaque valeur a_i (avec $1 \le i \le n$), la probabilité de l'événement $\{X = a_i\}$, notée $P(X = a_i) = p_i$

Elle est souvent résumée dans un tableau :

a_i	a_1	a_2	…	a_n
$P(X = a_i)$	$P(X = a_1)$	$P(X = a_2)$	…	$P(X = a_n)$

Espérance :
$E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n$

- Elle peut s'interpréter comme la **valeur moyenne** des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois.
- Lorsque X représente le gain d'un jeu, alors $E(X)$ représente le **gain moyen** par partie :
  - Si $E(X) > 0$ alors le jeu est **favorable** au joueur.
  - Si $E(X) < 0$ alors le jeu est **défavorable** au joueur
  - Si $E(X) = 0$ alors le jeu est **équitable**.

Variance :
$V(X) = (a_1 - E(X))^2p_1 + (a_2 - E(X))^2p_2 + \ \dots + (a_n - E(X))^2p_n$

Ecart-type :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

L'écart type est un paramètre de dispersion :
- Plus l'écart type est grand, plus les valeurs prises par X vont être dispersées autour de l'espérance. Le jeu est alors plus risqué.
- Plus l'écart type est petit, plus les valeurs prises par X vont être resserrées autour de l'espérance. Le jeu est alors moins risqué.

Corrigés des exercices

Suites (page 3)

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - 5$.

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 5 = 3(n^2 + 2n + 1) - 5 = 3n^2 + 6n - 2$$

$$u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 6n - 2 - (3n^2 - 5) = 3n^2 + 6n - 2 - 3n^2 + 5 = 6n + 3$$

Or $n \geq 0$, donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1} > u_n$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

Exercice 2

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = 1$ pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n^2 - 2v_n$.

1. $v_1 = v_0^2 - 2v_0 = 1^2 - 2 = -1$, $v_2 = v_1^2 - 2v_1 = (-1)^2 - 2 \times (-1) = 3$,
   $v_3 = v_2^2 - 2v_2 = 3^2 - 2 \times 3 = 3$.
2. Cette suite n'est pas monotone :
   en effet, $v_1 < v_0$, donc la suite n'est pas croissante. $v_2 > v_1$, donc la suite n'est pas décroissante.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -5$.

1. Pour tout entier naturel n $u_n = u_0 + nr = 3 - 5n$
   On a donc : $u_{10} = 3 - 5 \times 10 = -47$
2. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 11.\frac{u_0 + u_{10}}{2} = 11.\frac{3-47}{2} = 11 \times (-22) = -242$

Exercice 4

Soit (v_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$.

1. Pour tout entier naturel n $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 3^n$
   On a donc : $u_{10} = 2 \times 3^{10} = 118098$
2. $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{10} = v_0.\frac{1-q^{11}}{1-q} = 2.\frac{1-3^{11}}{1-3} = -(1 - 3^{11}) = -1 + 3^{11} = 177146$

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

1. $u_0 = 1, u_1 = 3u_0 + 2 = 5, u_2 = 3u_1 + 2 = 17$
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc cette suite n'est pas arithmétique.
   $u_1 = 5u_0$, mais $u_2 \neq 5u_1$, donc cette suite n'est pas géométrique.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 1$.
   a. Pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 2 + 1 = 3u_n + 3 = 3(u_n + 1) = 3v_n$$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3, et de 1er terme $v_0 = u_0 + 1 = 2$
   b. On a donc : $v_n = v_0.q^n = 2.3^n$ puis $u_n = v_n - 1 = 2.3^n - 1$

Fonctions de référence (page 6)

Exercice 1

1. L'équation $x^2 = 9$ a pour solution(s) dans $\mathbb{R}$: **d.** 3 et -3
   La courbe de la fonction carré a deux points d'ordonnées égale à 9. Leurs abscisses sont 3 et -3
2. Dans $\mathbb{R}, x^2 > 4$ équivaut à : **c.** $x > 2$ *ou* $x < -2$
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x} < 3$ est : **c.** $[0; 9[$
4. La fonction inverse est : **a.** décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

Exercice 2

a. $\frac{1}{x} = 2$ Il y a une seule solution : $x = \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{x} < 2$ Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de la fonction inverse situés au-dessous de la droite d'équation $y = 2$. L'ensemble des solutions est $]-\infty; 0[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

c. $x^2 = 5$ Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de la fonction carré dont l'ordonnées est 5 : Il y a deux solutions, $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.

d. $x^2 \geq 5$ Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de la fonction carré situés au-dessus de la droite d'équation $y = 5$. L'ensemble des solutions est $\left]-\infty; -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}; +\infty\right[$.

Exercice 3

$-2 \leq x \leq -1$ donc $(-2)^2 \geq x^2 \geq (-1)^2$ car la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

Soit : $1 \leq x^2 \leq 4$

Donc $-1 \geq -x^2 \geq -4$ car on multiplie par -1 qui est négatif.

Soit : $-4 \leq -x^2 \leq -1$

Donc $-4 + 5 \leq 5 - x^2 \leq -1 + 5$ car on ne change pas le sens des inégalités en ajoutant 5.

$1 \leq 5 - x^2 \leq 4$

Donc $\frac{1}{1} \geq \frac{1}{5-x^2} \geq \frac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $[0; +\infty[$

Soit : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{5-x^2} \leq 1$

Second degré (page 8)

Exercice 1

Soit le trinôme $h(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Choisir la seule réponse correcte à chaque question.

1. Son discriminant Δ est : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$ Réponse c
2. Ses racines sont : $\frac{2-\sqrt{16}}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ et $\frac{2+\sqrt{16}}{6} = \frac{6}{6} = 1$ Réponse b
3. Sous forme factorisée, $h(x)$ est égal à : $h(x) = 3\left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)(x-1) = (3x+1)(x-1)$

   Réponse a

Exercice 2

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$

Cette équation a donc deux solutions : $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

b) $x^2 - 3x + 3 = 0$ $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$

Cette équation n'a pas de solution.

c) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Cette équation a une seule solution.

(Remarque : On peut aussi calculer $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 25 = 0$. D'où une seule solution : $= \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$)

Exercice 3

1) Soit le trinôme $5x^2 - 3x - 2$. Son discriminant est : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 49$

Ce trinôme a donc deux racines : $x_1 = \frac{3-\sqrt{49}}{10} = -\frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{49}}{10} = 1$

Il est positif à l'extérieur des racines (car $a = 5$). D'où son tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		1		$+\infty$
$5x^2 - 3x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 10x + \frac{25}{2} \geq 0$ Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 2 \times \frac{25}{2} = 0$$

Donc le trinôme a une seule racine : $\alpha = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ et il est toujours positif ou nul, car $a = 2$.
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

b) $-2x^2 - 9x + 5 < 0$ Le discriminant de ce trinôme est :

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 121$$

Ce trinôme a donc deux racines : $x_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{-4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{-4} = -5$
Il est négatif à l'extérieur des racines (car $a = -2$). D'où son tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 - 9x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty; -5[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Exercice 4

1) Le discriminant de $h(x)$ est : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 81$
Donc $h(x)$ a deux racines : $x_1 = \frac{1-\sqrt{81}}{10} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{81}}{10} = 1$
Sa forme factorisée est : $h(x) = 5\left(x - \left(-\frac{4}{5}\right)\right)(x-1) = (5x+4)(x-1)$

2) Les points d'intersection de la parabole P avec l'axe des abscisses sont les points dont l'abscisse vérifie $h(x) = 0$. Comme cette équation a deux solution, il y a deux points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses : leurs abscisses sont respectivement $-\frac{4}{5}$ et 1.

Exercice 5

Soit la fonction polynôme du second degré f, représentée par la parabole qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 3 et 6 et qui passe par le point C(7; −4).

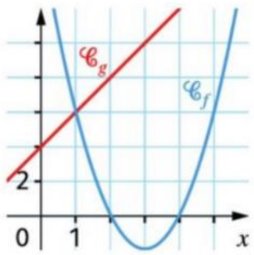
$f(x)$ a donc deux racines : 3 et 6. On a alors : $f(x) = a(x-3)(x-6)$

De plus : $f(7) = -4$, donc $a(7-3)(7-6) = -4$, soit : $4a = -4$,donc : $a = -1$

On a donc : $f(x) = -(x-3)(x-6) = -(x^2 - 6x - 3x + 18) = -x^2 + 9x - 18$

Exercice 6

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et $g(x) = 2x + 4$



1) Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2x^2 - 12x + 16 - 2x - 4 = 2x^2 - 14x + 12$

Etudions le signe de $2x^2 - 14x + 12$: $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100$

Ce trinôme a deux racines $x_1 = \frac{14-\sqrt{100}}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{14+\sqrt{100}}{4} = 6$, et il est positif à l'extérieur des racines. D'où le tableau suivant :

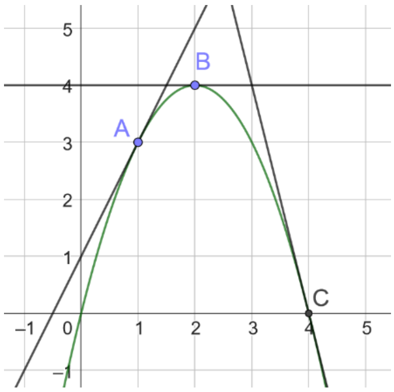
x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Les points d'intersections de C_f et C_g sont les points dont l'abscisse vérifie : $f(x) = g(x)$,

soit : $f(x) - g(x) = 0$. D'après la question 1, ces points ont pour abscisses 1 et 6. Il s'agit donc du point $A(1\,; f(1)) = A(1\,; 6)$ et du point $B(6\,; f(6)) = B(6\,; 16)$

3) C_f est en-dessous de C_g lorsque $f(x) < g(x)$, soit lorsque : $f(x) - g(x) < 0$.
D'après la question 1 et le tableau de signe : C_f est en-dessous de C_g sur l'intervalle]1 ; 6[.

Dérivation (page 13)



Exercice 1

Les nombres dérivés $f'(1), f'(2)$ et $f'(4)$ sont les coefficients directeurs respectifs des tangentes en A, B et C :

$$f'(1) = 2 \quad ; \quad f'(2) = 0 \quad ; \quad f'(4) = -4$$

Exercice 2

$f'(x) = 4x^3 - 3 \times 2x + 0 = 4x^3 - 6x$

$g(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = 2x^2 - x$. On a : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4x - 1$
$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3(2x^2 - x) + (3x + 1)(4x - 1) = 6x^2 - 3x + 12x^2 - 3x + 4x - 1$
$g'(x) = 18x^2 - 2x - 1$

$h(x) = \frac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 2x^2 + 1$. On ^{2} : $v'(x) = 4x$
Donc : $h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{4x}{(2x^2+1)^2}$

$k(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 5x + 1$ et $v(x) = x^2 + 3$. On a : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2x$
Donc : $k'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{5(x^2+3) - 2x(5x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{5x^2+15-10x^2-2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-5x^2-2x+15}{(x-3)^2}$

$l(x) = g(ax + b)$ avec $g(x) = \sqrt{x}, a = 3, b = 6$. On a : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Donc : $l'(x) = ag'(ax + b) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$

Exercice 3

1. $f'(x) = -2x + 3$
2. Etudions le signe de $-2x + 3$: $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

   Tableau de signe de f', et variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{13}{4}$	↘	

3. La fonction f admet un maximum en $\frac{3}{2}$. Ce maximum est : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{4}$

Exercice 4

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$
2. $f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 2x - 3$, qui est un trinôme dont le discriminant est :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

   $x^2 - 2x - 3$ a donc deux racines : $x_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3$, et est positif à l'extérieur des racines. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	12	↘	-20	↗	

Exercice 5

1. $g'(x) = 0{,}25 \times 2x - 1{,}5 = 0{,}5x - 1{,}5$
2. Etudions le signe de $g'(x)$: $0{,}5x - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 3$

x	0		3		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$3{,}25$	↗	$9{,}5$

3. La fonction g a un minimum égal à 3,25, atteint en 3.
   Donc le coût moyen est minimum pour 3000 actions gérées. Ce coût est alors égal à 325 euros.

Fonction exponentielle (page 16)

Exercice 1

$A = \mathrm{e}^{x-3} \times \mathrm{e}^{2+4x} = \mathrm{e}^{x-3+2+4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$; $B = (\mathrm{e}^{x})^3 \times \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{3x-3x} = \mathrm{e}^0 = 1$

$C = \dfrac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\mathrm{e}^{x-1}} = \mathrm{e}^{4x-1-(x-1)} = \mathrm{e}^{4x-1-x+1} = \mathrm{e}^{3x}$

Exercice 2

Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{x-1} \Leftrightarrow 3x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$$
$$\mathrm{e}^{3x-2} \geq 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x-2} \geq \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$
$$\mathrm{e}^{4x-6} < \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow 4x - 6 < -2 \Leftrightarrow 4x < 4 \Leftrightarrow x < 1$$

Exercice 3

La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = 3\mathrm{e}^x$ et $v(x) = 5x^2$. On a alors : $u'(x) = 3\mathrm{e}^x$ et $v'(x) = 5 \times 2x = 10x$
Donc $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 3\mathrm{e}^x + 10x$

La fonction g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Posons $u(x) = 5x - 8$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors : $u'(x) = 5$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$
Donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 5\mathrm{e}^x + (5x-8)\mathrm{e}^x = (5 + 5x - 8)\mathrm{e}^x = (5x-3)\mathrm{e}^x$

$h(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ avec $a = -3, b = 1$ donc $h'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b} = -3\mathrm{e}^{-3x+1}$

Exercice 4

1. La fonction f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Posons $u(x) = x - 3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors : $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$
   Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \mathrm{e}^x + (x-3)\mathrm{e}^x = (1 + x - 3)\mathrm{e}^x = (x-2)\mathrm{e}^x$
2. Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, donc d'après la règle du signe d'un produit, $f'(x)$ a le même signe que $x - 2$:
   Si $x < 2, x - 2 < 0$ et si $x > 2, x - 2 > 0$.
3. On en déduit le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\mathrm{e}^2$	↗	

Exercice 5

1. La fonction g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Posons $u(x) = x^2 - 9x + 19$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors : $u'(x) = 2x - 9$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$
   $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x-9)\mathrm{e}^x + (x^2 - 9x + 19)\mathrm{e}^x = (2x - 9 + x^2 - 9x + 19)\mathrm{e}^x$

$$g'(x) = (x^2 - 7x + 10)e^x$$

2. Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que le trinôme $x^2 - 7x + 10$.
Son discriminant est : $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$
Ce trinôme a donc deux racines : $x_1 = \frac{7-\sqrt{9}}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$
Il est positif à l'extérieur des racines.
D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On en déduit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$5e^2$	$\searrow$	$-e^5$	$\nearrow$	

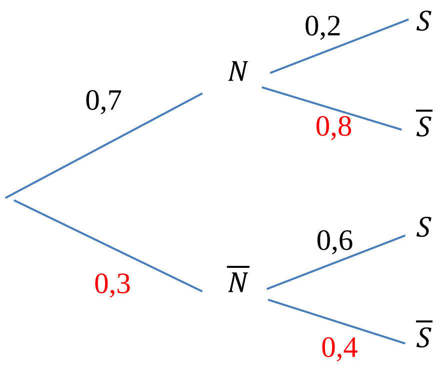
Probabilités conditionnelles (pages 19/20)

Exercice 1

1. $P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
2. $0{,}2 = P_N(S)$
3. $P(N \cap S) = P(N).P_N(S) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$
4. Compéter l'arbre pondéré : voir ci-contre
5. D'après la loi des probabilités totales,

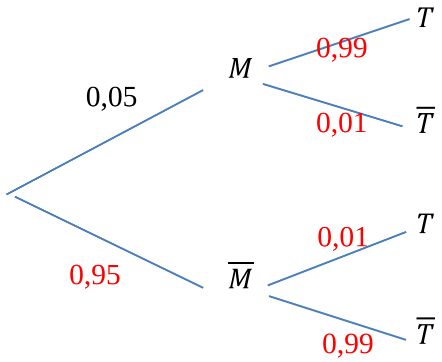
$$P(S) = P(N \cap S) + P(\overline{N} \cap S)$$

$$P(S) = 0{,}14 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}32$$



Exercice 2

1. On complète l'arbre pondéré suivant à l'aide de l'énoncé.



2. $P(M \cap T) = P(M).P_M(T) = 0{,}05 \times 0{,}99 = 0{,}0495$

   $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}).P_{\overline{M}}(T) = 0{,}95 \times 0{,}01 = 0{,}0095$
3. D'après la loi des probabilités totales, $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}0495 + 0{,}0095 = 0{,}059$
4. La personne choisie au hasard a eu un test positif. La probabilité qu'elle soit atteinte par la maladie est $P_T(M)$: $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0495}{0{,}059} \cong 0{,}839$

Exercice 3

D'après l'énoncé : $P(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}4$; $P(A \cap B) = 0{,}03$
$P(A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12 \neq P(A \cap B)$ Donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Variables aléatoires (pages 22/23)

Exercice 1

1. X prend les valeurs 5, 10 ou 20.

   Les 7 jetons étant équiprobables, $P(X=5)=\frac{4}{7}$ $\quad P(X=10)=\frac{2}{7}$ $\quad P(X=20)=\frac{1}{7}$

a	5	10	20
$P(X=a)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

2. $E(X)=5\times\frac{4}{7}+10\times\frac{2}{7}+20\times\frac{1}{7}=\frac{60}{7}\approx 8{,}57$ (Gain moyen par partie : environ 8,57 €)

$$V(X)=\left(5-\frac{60}{7}\right)^2\times\frac{4}{7}+\left(10-\frac{60}{7}\right)^2\times\frac{2}{7}+\left(20-\frac{60}{7}\right)^2\times\frac{1}{7}=\frac{625}{49}\times\frac{4}{7}+\frac{100}{49}\times\frac{2}{7}+\frac{6400}{49}\times\frac{1}{7}$$

$$V(X)=\frac{9100}{49\times 7}=\frac{1300}{49}$$

Exercice 2

a	-5	-4	0	1	2	3	4
$P(G=a)$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1

On calcule l'espérance de G :

$$E(G)=-5\times 0{,}1-4\times 0{,}2+0\times 0{,}1+1\times 0{,}3+2\times 0{,}1+3\times 0{,}1+4\times 0{,}1=-0{,}1$$

Ce jeu n'est pas équitable :il est défavorable au joueur.

Exercice 3

1. Compléter le tableau suivant, qui recense les valeurs de X pour toutes les issues.

1^er^ dé / 2^ème^ dé	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

2. X prend les valeurs 1, 2, 3 ou 4. L'univers a 16 issues équiprobables.

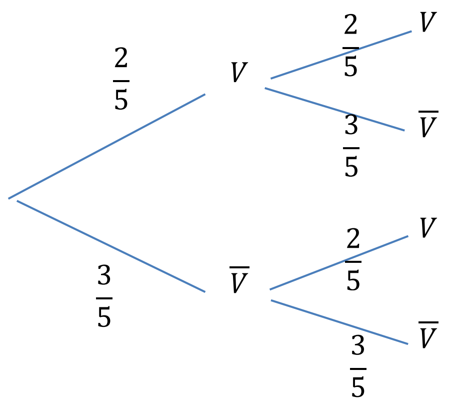
   L'événement $\{X=1\}$ contient 1 issue, donc $P(X=1)=\frac{1}{16}$

   L'événement $\{X=2\}$ contient 3 issues, donc $P(X=2)=\frac{3}{16}$

   De même : $P(X=3)=\frac{5}{16}$ et $P(X=4)=\frac{7}{16}$

Exercice 4

1. Compléter l'arbre de probabilités qui représente les deux tirages successifs.



2. La probabilité d'obtenir deux boules vertes est $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

La probabilité de n'obtenir aucune boule verte est $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

3. Un joueur mise 2€. Il gagne 2€ par boule verte tirée. On note Y la variable aléatoire égale au bénéfice du joueur.

a. Y prend la valeur 2 si le joueur a obtenu 2 boules vertes, 0 si le joueur a obtenu une seule boule verte, et – 2 si le joueur n'a obtenu aucune boule verte.

b. $P(Y = 2) = \frac{4}{25}$ $P(Y = -2) = \frac{9}{25}$ $P(Y = 0) = 1 - \frac{4}{25} - \frac{9}{25} = \frac{12}{25}$

a	2	0	– 2
$P(Y = a)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

c. $E(Y) = 2 \times \frac{4}{25} + 0 \times \frac{12}{25} - 2 \times \frac{9}{25} = \frac{-10}{25} = -0{,}4$

Le jeu est défavorable au joueur, car le bénéfice moyen par partie est négatif.