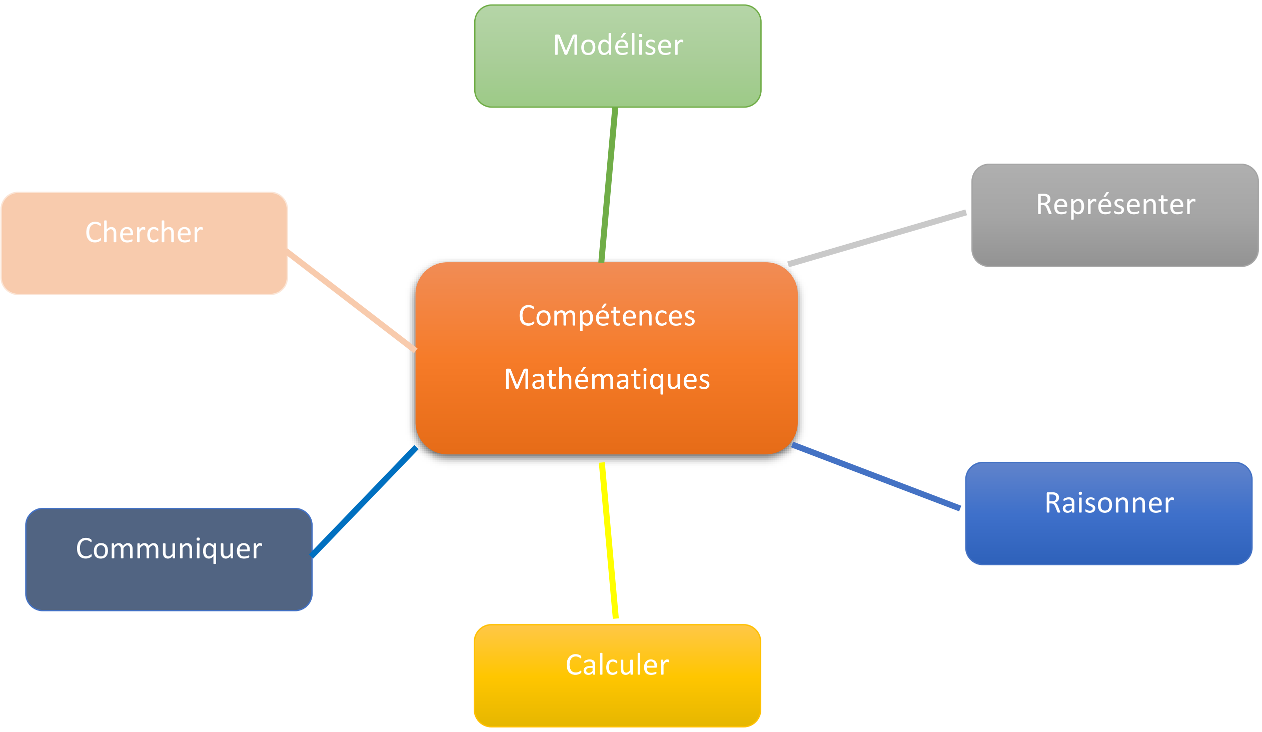
Livret d'exercices de Mathématiques de la 3ème à la 2nde



En septembre, vous entrerez au lycée en classe de seconde. Vous aurez 4h de mathématiques par semaine.

La classe de seconde est conçue pour vous permettre de consolider vos connaissances. Elle prépare aussi à déterminer votre choix d'un parcours jusqu'au baccalauréat général ou technologique dans l'objectif d'une poursuite d'études supérieures, et au-delà, d'une insertion professionnelle réussie.

L'enseignement des mathématiques en classe de seconde est conçu à partir des intentions suivantes :

- vous permettre de consolider des acquis du collège et de développer votre goût des mathématiques ;
- assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études au lycée ;
- vous préparer au choix de l'orientation pour la classe de première : choix de la spécialité mathématiques dans la voie générale, choix de la série dans la voie technologique.

Ce livret d'exercices reprend une partie des attendus de fin de 3ème et propose **des exercices d'entraînement, des cartes mentales, des exercices résolus, pour aborder l'année de seconde dans de bonnes conditions.**

Ce livret est à conserver pour la classe de seconde. Il pourra être un outil vers lequel vous pourrez vous reporter autant que besoin. Vos professeurs pourront l'utiliser au cours de l'année de seconde.

En attendant : très bonnes vacances !

Notions de multiples, de diviseurs, de nombres premiers

Une carte mentale pour résumer le cours :

Arithmétique

Division euclidienne

Si a et b sont deux nombres entiers naturels avec $b \neq 0$
Alors il existe <u>un unique couple de nombres entiers naturels</u> q et r tels que :
$\boldsymbol{a = b \times q + r}$ **avec** $\boldsymbol{0 \leq r < b}$
a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient entier et r le reste

2 0 2 1	1 5
5 2	1 3 4
7 1	
1 1	

$2021 = 15 \times 134 + 11$

2021 est le dividende ;
15 est le diviseur
134 est le quotient
11 le reste
reste < diviseur

Diviseurs et multiples

a est un multiple de b
b est un diviseur de a
a est divisible *par* b
s'il existe un entier k tel que $a = k \times b$

Exemple : 42 est un multiple de 7 car $42 = 7 \times 6$

<u>Vocabulaire</u> : si le reste de la division euclidienne de a par b est nul alors on dit que :
- a est <u>un multiple</u> de b.
- b est <u>un diviseur</u> de a.
- a est <u>divisible</u> par b

<u>Exemple</u> : $51 = 17 \times 3$
- 51 est un multiple de 17 et de 3
- 17 ou 3 sont des diviseurs de 51
- 51 est divisible par 17 et 3

Un diviseur commun à deux entiers divise à la fois les deux entiers.
Exemple : 7 est un diviseur commun de 42 et 14

Nombres premiers

<u>Définition</u> : Un nombre entier naturel est <u>un nombre premier</u> s'il n'admet que deux diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même.
Exemples : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;23 ;…

<u>Décomposition</u> : Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit comme produit de facteurs de nombres premiers. Cette décomposition est unique.
Exemple : $28 = 2 \times 2 \times 7$; $45 = 3 \times 3 \times 5$

Critères de divisibilité

Un nombre entier est <u>divisible par 2</u> si et seulement si le chiffre des unités est : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8
Un nombre entier est <u>divisible par 5</u> si et seulement si le chiffre des unités est : 0 ou 5.
Un nombre entier est <u>divisible par 10</u> si et seulement si le chiffre des unités est : 0

Un nombre entier est <u>divisible par 3</u> si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3
Un nombre entier est <u>divisible par 9</u> si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9

<u>Exercice résolu</u> : décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 4116 et 2156

$4116 = 2 \times 2058 = 2 \times 2 \times 1029 = 2 \times 2 \times 3 \times 343 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 49 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7$
$2156 = 2 \times 1078 = 2 \times 2 \times 539 = 2 \times 2 \times 7 \times 77 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 11$

<u>Exercice résolu</u> : Remplacer • par des chiffres afin que le nombre obtenu vérifie la condition donnée. Écrire toutes les solutions possibles.
5• 8•2 est divisible par 9.

$5 + 8 + 2 = 15$. Les multiples de 9 supérieurs à 15 sont 18, 27, 36, 45…
Or la somme de deux chiffres ne peut pas être supérieure à 18, donc on ne peut pas obtenir une somme supérieure à 33.
D'où, on ne peut obtenir qu'une somme égale à 18 ou 27.

Pour cela : $18 = 15 + 3$ donc les nombres possibles sont **50 832** ou **53 802**
$18 = 15 + 2 + 1$ donc les nombres possibles sont **52 812** ou **51 822**

$27 = 15 + 12 = 15 + 3 + 9$ donc les nombres possibles sont **53 892** ou **59 832**
$27 = 15 + 12 = 15 + 4 + 8$ donc les nombres possibles sont **54 882** ou **58 842**
$27 = 15 + 12 = 15 + 5 + 7$ donc les nombres possibles sont **55 872** ou **57 852**
$27 = 15 + 12 = 15 + 6 + 6$ donc les nombres possibles sont **56 862**

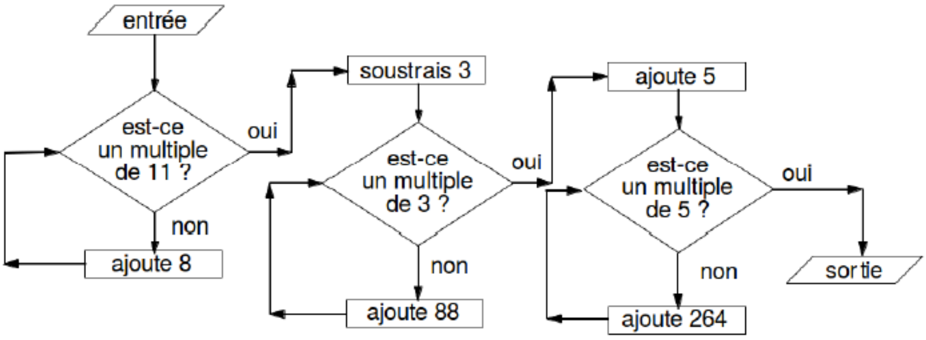
A vous de jouer !

Exercice 1 :

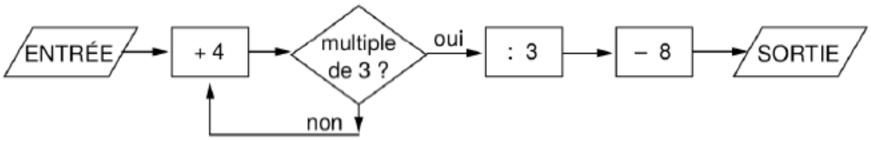
1) Compléter les phrases suivantes avec multiple ou diviseur :
36 est un ………………… de 4 ; 9 est un …………………… de 27 ; 8 est un ………………… de 32.
2) Quels sont les restes possibles d'une division euclidienne par 7 ?
3) Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? 132 - 17 - 53 - 2103
4) Quelle écriture de 48 est une décomposition en produit de facteurs premiers ?
$48 = 6 \times 8$; $48 = 2 \times 24$; $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$; $48 = 2 \times 2 \times 3 \times 4$

Exercice 2 :

1) Entrer le nombre 437 dans l'organigramme suivant, quel nombre obtient-on à la sortie ?



2) Quel nombre entier faut-il entrer dans l'organigramme suivant pour obtenir 39 à la sortie ? [3 solutions]



Exercice 3 : Décomposer le nombre 2 635 en produit de facteurs premiers.

Enigme n°1 :

Le grand livre de magie de Dumbledore est ouvert à la double page du sort qui permet de devenir le meilleur en maths. Les numéros de ces deux pages sont deux nombres entiers consécutifs à deux chiffres.

Le produit des quatre chiffres qui composent ces deux nombres est égal à 294. Quel est le numéro de la première page du sort ?

Coup de pouce : penser à décomposer 294 en produit de facteurs premiers

Calcul fractionnaire

Une carte mentale pour résumer le cours

Fractions

Vocabulaire

$\frac{a}{b}$ — a : numérateur, b : dénominateur, $b \neq 0$

$\frac{a}{b}$ est irréductible si le seul diviseur commun à a et b est 1

Inverse d'un nombre

L'inverse d'un nombre a non nul est $\frac{1}{a}$

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Prendre une fraction d'une quantité

On multiplie la fraction par cette quantité :

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$$

Egalité

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *équivaut à* $a \times d = b \times c$

Produit

On multiplie :
Les numérateurs entre eux
et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Somme et différence

On met les fractions sur le même dénominateur
On additionne ou soustrait les numérateurs
On conserve le dénominateur commun

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{b \times d} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} - \frac{c \times b}{b \times d} = \frac{a \times d - c \times b}{b \times d}$$

Quotient

Diviser par un nombre différent de zéro revient à multiplier par l'inverse de ce nombre

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Exercice résolu : Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{7}{6} - \frac{5}{9} \qquad B = \frac{21}{5} \times \frac{65}{42} \quad et \quad C = \frac{21}{14} \div \frac{56}{64}$$

Pour additionner ou soustraire deux fractions, il faut **commencer par les écrire avec le même dénominateur.** Ici, on cherche un multiple commun à 7 et 4 (en général on recherche le plus petit possible).

$6 \times 1 = 6$	$9 \times 1 = 9$	
$6 \times 2 = 12$	$9 \times 2 = 18$	18 est donc un multiple commun.
$6 \times 3 = 18$	$9 \times 3 = 27$	

$$A = \frac{7}{6} - \frac{5}{9} = \frac{7 \times 3}{6 \times 3} - \frac{5 \times 2}{9 \times 2} = \frac{21}{18} - \frac{10}{18} = \frac{21 - 10}{18} = \frac{11}{18}$$

Pour multiplier deux fractions, il faut commencer par multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
On décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers puis on réduit les numérateur et dénominateur.

$$B = \frac{21}{5} \times \frac{65}{42} = \frac{21 \times 65}{5 \times 42} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 13}{\cancel{5} \times \cancel{7} \times \cancel{3} \times 2} = \frac{13}{2}$$

$$C = \frac{21}{14} \div \frac{56}{64} = \frac{21}{14} \times \frac{64}{56} = \frac{21 \times 64}{14 \times 56} = \frac{\cancel{7} \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{7} \times \cancel{2} \times 7 \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = \frac{12}{7}$$

A vous de jouer !

Exercice 1 : Donner la forme irréductible des fractions suivantes :

$A = \frac{10}{6} \quad B = \frac{63}{27} \quad C = \frac{81}{48}$

Exercice 2 : Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$D = \frac{3}{4}+\frac{7}{4} \qquad E = \frac{4}{5}-\frac{3}{4} \qquad F = \frac{35}{14}\times\frac{2}{7} \qquad G = 2\times\frac{3}{8} \qquad H = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{3}\right) \qquad I = \frac{7}{3}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$

$J = \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{6}\right) \qquad K = \left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\div\frac{10}{3}\right)\div\left(5-\frac{3}{7}\right)$

Exercice 3 : Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

		A	B	C	D
1	Dans un club sportif, $\frac{1}{8}$ des adhérents ont plus de 42 ans et $\frac{1}{4}$ ont moins de 25 ans. La proportion d'adhérents ayant un âge de 25 à 42 ans est ...	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{9}$	0,214 285 714	0,111 111 111
3	La valeur exacte de $\frac{1-(-4)}{-2+9}$ est :	$\frac{5}{7}$	8	0,714 285 714 3	$\frac{-3}{7}$

Enigme n°2 :

Madame Peudechance a commandé un lot d'assiettes. En ouvrant le carton elle constate avec stupeur que les $\frac{2}{3}$ sont ébréchées, la moitié sont fêlées et $\frac{1}{4}$ sont à la fois fêlées et ébréchées. Seules deux assiettes sont intactes.
Combien y a-t-il d'assiettes dans le carton ?

Calculs impliquant des puissances, notation scientifique

Une carte mentale pour résumer le cours :

Puissances

Vocabulaire

a est un nombre relatif et
n est un **entier positif** **non nul**.
a^n est **une puissance du nombre a**
n est appelé **l'exposant**

n est un entier positif non nul.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}$
- $si\ a \neq 0, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ fois}}$
- Par convention $a^0 = 1$, avec $a \neq 0$

Ecriture scientifique

$\boldsymbol{a \times 10^p\ avec\ 1 \leq a < 10}$
et p un nombre entier relatif
p est l'ordre de grandeur

Cette notation permet de comparer plus facilement des grandeurs ayant même unité

Puissance d'un même nombre

n et m sont deux entiers relatifs non nuls

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Puissance d'un même exposant

n et m sont deux entiers relatifs non nuls

- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

Somme de puissances

On calcule chaque terme de la somme !

$5 \times 10^2 + 3 \times 10^{-2} = 500 + 0{,}03 = 500{,}03$

Attention aux parenthèses !

- $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$ **et** $-5^2 = -5 \times 5 = -25$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$ **et** $\dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}$
- $(2+1)^2 = 3^2 = 9$ **et** $2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$

Exercice résolu :

1) Ecrire les nombres suivants sous la forme a^n où a est un nombre et n un entier relatif

$$A = 2^3 \times 2^{-6} \quad B = \frac{5^6}{5^{-7}} \quad C = (2^3)^8 \quad D = 2^4 \times 7^4 \quad E = (-3)^5 \times (-2)^5$$

2) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants

$$F = 3\,756 \qquad G = 0{,}023\,54 \qquad H = 35{,}698$$

1) $A = 2^3 \times 2^{-6} = 2^{3+(-6)} = 2^{-3}$ $\quad B = \dfrac{5^6}{5^{-7}} = 5^{6-(-7)} = 5^{6+7} = 5^{13}$ $\quad C = (2^3)^8 = 2^{3\times 8} = 2^{24}$

On remarque que ces différents nombres sont des puissances d'un même nombre et on applique les formules.

$D = 2^4 \times 7^4 = (2 \times 7)^4 = 14^4$ $\quad E = (-3)^5 \times (-2)^5 = ((-3) \times (-2))^5 = 6^5$

On remarque que ces différents nombres sont des puissances d'un même exposant et on applique les formules.

2) On écrit ces nombres sous la forme $a \times 10^p\ avec\ 1 \leq a < 10$ et p un nombre entier relatif

$F = 3\,756 = 3{,}746 \times 1\,000 = 3{,}756 \times 10^3$

$G = 0{,}023\,54 = 2{,}354 \div 100 = 2{,}354 \div 10^2 = 2{,}354 \times 10^{-2}$

$H = 35{,}698 = 3{,}5\,698 \times 10 = 3{,}5\,698 \times 10^1$

A vous de jouer !

Exercice 1 : Donner les résultats sous la forme d'une puissance d'un nombre.

$A = 10^3 \times 10^2$; $B = 2^3 \times 4^3$; $C = \dfrac{3^2 \times 3^5}{3^4}$; $D = (2^3)^{-2}$; $E = \dfrac{35^3}{7^3}$

Exercice 2 : Calculer sans calculatrice :

$F = 5^3 - 2^3$; $G = 4^{-2} + 2^{-3}$; $H = -5^3 + (3^2 - 1)^3$

Exercice 3:

1) Donner l'écriture décimale des nombres suivants : $I = 12{,}45 \times 10^4$; $J = 32 \times 10^{-5}$
2) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants $K = 0{,}0034 \times 10^{-2}$; $L = 48{,}34 \times 10^5$
3) Calculer et donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$M = \dfrac{4 \times 10^4 \times 9 \times 10^2}{3 \times 10^3}$; $N = 3{,}5 \times 10^{-2} + 5{,}2 \times 10^{-1}$; $P = 32{,}56 \times 10^1 - 0{,}4 \times 10^3$

4) Ecrire sous la forme 3^n avec n un entier relatif, le nombre suivant :

$Q = \dfrac{3^2 \times 27^3}{81^2}$

5) Ecrire le nombre sous la forme $2^n \times 5^m$ avec n et m des entiers relatifs

$R = \dfrac{(10^2)^3}{2^{-4} \times 25^6}$

Enigme n°3:

On veut ouvrir un coffre-fort dont le code est un nombre à trois chiffres. Voici les tentatives de quelqu'un qui ne connait pas le code :

408 : aucun chiffre n'est correct (ni bien, ni mal placé)
369 : un seul chiffre est correct mais ce chiffre est bien placé
980 : un seul chiffre est correct mais ce chiffre est mal placé
637 : un seul chiffre est correct mais ce chiffre est mal placé
235 : un seul chiffre est correct mais ce chiffre est mal placé

Le code est-il déterminé si l'on sait qu'il s'agit d'un carré d'un entier ?

Calcul littéral : développement et factorisation

Deux cartes mentales pour résumer le cours :

Développer et réduire

Définition ?

Une expression algébrique contient des nombres et des lettres (qui symbolisent des nombres), ainsi que des opérations et des parenthèses.
Exemple : $2(x+7)-3x^2+4y+29$ est une expression algébrique

Développer une expression algébrique écrite sous la forme d'un produit consiste à l'écrire sous la forme d'une somme (ou d'une différence).

Réduire une expression algébrique c'est la simplifier

Pourquoi ?

Développer permet :
- de simplifier l'expression
- de faire du calcul mental
- d'utiliser une forme plus adaptée au travail à effectuer !

Comment ?

En utilisant la simple distributivité :

$$k(a+b) = k\times a + k\times b$$
$$k(a-b) = k\times a - k\times b$$

En utilisant la double distributivité :

$$(a+b)(c+d) = a\times(c+d) + b\times(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

En utilisant les identités remarquables :

$$\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b)\times(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = \boldsymbol{a^2+2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a-b)^2} = (a-b)\times(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = \boldsymbol{a^2-2ab+b^2}$$
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)} = a^2-ab+ba-b^2 = \boldsymbol{a^2-b^2}$$

Exercice résolu :
Développer les expressions algébriques suivantes :
$A=2(x+3y)$; $B=\ 5(x-3x^2)$; $C=\ (5+2x)^2$; $D=(5-2x)^2$; $E=(5+2x)(5-2x)$;
$F=(3x+5)(4+2x)$; $G=\ (2x-5)(4-3x)$

$A = \mathbf{2}(x+3y) = \mathbf{2}\times x + \mathbf{2}\times 3y = 2x+6y$
$B = \mathbf{-5}(x-3x^2) = \mathbf{-5}\times x \mathbf{-5}\times(-3x^2) = -5x+15x^2$

$C = (5+2x)^2 = 5^2+2\times5\times2x+(2x)^2 = 25+20x+4x^2$
$D = (5-2x)^2 = 5^2-2\times5\times2x+(2x)^2 = 25-20x+4x^2$
$E = (5+2x)(5-2x) = 5^2-(2x)^2 = 25-4x^2$

$$\begin{aligned} F = (3x+5)(4+2x) &= \mathbf{3x}\times(4+2x) \mathbf{+5}\times(4+2x)\\ &= 3x\times4+3x\times2x+5\times4+5\times2x\\ &= 12x+6x^2+20+10x\\ &= 6x^2+22x+20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = (2x-5)(4-3x) &= \mathbf{2x}\times(4-3x) \mathbf{-5}\times(4-3x)\\ &= 2x\times4+2x\times(-3x)-5\times4-5\times(-3x)\\ &= 8x-6x^2-20+15x^2\\ &= 9x^2+8x-20 \end{aligned}$$

Factoriser

Définition ?

Factoriser une expression algébrique écrite sous la forme d'une somme consiste à l'écrire sous la forme d'un produit.

Pourquoi ?

Factoriser permet :
- de faire du calcul mental
- de résoudre des équations
- d'utiliser une forme plus adaptée au travail à effectuer !

Comment ?

En utilisant la simple distributivité : on remarque un facteur commun :

$$k \times a + k \times b = k(a+b)$$
$$k \times a - k \times b = k(a-b)$$

En utilisant l'identité remarquable :

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

<u>Exercice résolu</u> :
Factoriser les expressions algébriques suivantes :
$A = 5x + 5y$; $B = 10x + 4y - 6a$; $C = (4x-5)(2x+3) - (4x-5)(x+7)$; $D = (5+2x)^2 - (3x-7)^2$

On remarque un facteur commun aux deux termes de la somme A
$A = 5x + 5y = 5 \times (x+y)$

On ne remarque pas de suite un facteur commun aux termes de la somme B mais en décomposant on s'aperçoit que le nombre 2 est un facteur commun !
$B = 10x + 4y - 6a = 5x \times 2 + 2 \times 2y - 3 \times 2a$
$= 2 \times (5x + 2y - 3a)$

On remarque que les deux termes de la somme C sont des produits. Dans ces produits, on remarque un facteur commun $(4x-5)$
$C = (4x-5)(2x+3) - (4x-5)(x+7) = (4x-5) \times [(2x+3) - (x+7)]$
$= (4x-5) \times [2x + 3 - x - 7] = (4x-5) \times (x-4)$

On remarque que D est une différence de deux carrés, on peut donc factoriser à l'aide de l'identité remarquable
$D = (5+2x)^2 - (3x-7)^2$ ici $a = 5 + 2x$ et $b = 3x - 7$
$= [(5+2x) + (3x-7)] \times [(5+2x) - (3x-7)]$ on fait attention au signe $-$ devant la parenthèse !!
$= [5 + 2x + 3x - 7] \times [5 + 2x - 3x + 7]$
$= (5x - 2) \times (-x + 12)$

A vous de jouer !

Exercice 1 : parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les sommes et en vert les produits :

$a + 3 \times 5$; $5b + 7$; $4(3x + 6)$; $(6u + 4) \times 5$; $(4x - 5) - (7x + 8)$; $y - 5$

Exercice 2 : Parmi les expressions algébriques suivantes, trouver dans chaque cas celle qui convient et la recopier dans le tableau :

$\frac{2 + x}{2}$; x^2 ; $2 + \frac{x}{2}$; $2 + x$; $2x$; $2 \times x + 3$; $x + 3 \times 2$; $2 \times (x + 3)$

	Expression choisie
La somme de 2 et de x	
Le double de x	
Le carré de x	
La somme de 2 et de la moitié de x	
La moitié de la somme de 2 et de x	
La somme de x et du produit de 3 par 2	
Le produit de 2 par la somme de x et de 3	
La somme du produit de 2 par x et de 3	

Exercice 3 :

1) Développer et simplifier :

$A = a \times (a + 3)$; $B = (x^2 + 4) \times x$; $C = a \times (a^2 + a)$; $D = a \times (a + 1)$; $E = x \times (5x^2 + 2x + 3)$

2) Développer et simplifier :

$F = 7a^2(a^3 + 2a)$; $G = (3a^3 - 2a^2b - 2) \times 4ab$

3) Développer et simplifier :

$H = (3t - 2)(7t - 5)$; $I = (x + 3y)(6x - 2y)$; $J = (2x^2 - 5y)(-4x + 5y^2)$; $K = (2x^2 - 3x)(-3x + 7x^2)$

Exercice 4 :

1) Factoriser en utilisant un facteur commun :

$A = 3(x - 2) + (x + 3)(x - 2)$; $B = 5x(x - 3) - x(2x + 1)$; $C = (x + 4)^2 + (x + 4)$

$D = (2x + 5) - (x + 3)(4x + 10)$; $E = (x + 9)(x - 5) + 2(6x - 30)$

2) Factoriser en utilisant une identité remarquable :

$F = (x + 7)^2 - (3x + 2)^2$; $G = (3x - 1)^2 - 16$; $H = 9(x + 1)^2 - 49$

Exercice 5 :

On considère les nombres suivants $A = 4 \times 3 - 1 \times 3$; $B = 7 \times 5 - 2 \times 5$; $C = 10 \times 7 - 3 \times 7$

1. Calculer mentalement A, B et C.
2. En déduire que les nombres A, B et C sont tous les trois des carrés de nombres entiers.
3. On considère l'expression $D = (3x + 1)(2x + 1) - x(2x + 1)$ où x désigne un nombre entier.
   Factoriser D. En déduire que D est le carré d'un nombre.
4. Trouver une expression E de la même forme que A, B et C pour laquelle le résultat du calcul est 225.

Calcul littéral : résolutions d'équations

Une carte mentale pour résumer le cours :

Définitions

Solutions
Valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'égalité est vraie

Equation d'inconnue x
égalité entre deux expressions dans laquelle intervient un nombre inconnu x

Equations

Différents types d'équations

Equations du 1er degré :
$2x + 3 = 0$

Equation produit-nul
$(2x + 3)(5x - 4) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul

Equation du 2nd degré
$3x^2 + 4x = 5 + 3x^2$
$3x^2 + 7 = -6x^2 + 23$

On se ramène à un second membre nul

Factorisation impossible

Factorisation possible
$3x^2 + 7 = -6x^2 + 23$
$9x^2 - 16 = 0$

Résoudre : trouver des solutions

Utiliser les propriétés des expressions équivalentes, dans un membre ou l'autre :

- **Ajouter ou soustraire** le même nombre aux deux membres.
- **Multiplier ou diviser** les deux membres par le même nombre non nul.

Exemple :

$5x = 3(1 + x)$
$5x = 3 + 3x$ distributivité

$5x = 3 + 3x$
$-3x \quad 2x = 3 \quad -3x$

$2x = 3$
$\div 2 \quad x = \frac{3}{2} \quad \div 2$

Outils pour la résolution de problèmes

- **Reconnaître** si on peut modéliser algébriquement.
- **Repérer l'inconnue**, en s'aidant de la question. La nommer par une lettre.
- **Traduire par une égalité** entre deux expressions faisant intervenir l'inconnue.
- **Résoudre** : trouver la solution mathématique.
- **Donner la solution** au sens du problème

Exercice résolu :
1) Calculer la valeur numérique de $F(x) = 15x^2 - 3x - 5$ pour $x = -2$
2) Résoudre les équations $(2x + 3)(4x - 5) = 0$; $3x^2 + 7 = -6x^2 + 23$ et $\frac{x-3}{4} = 2x + 1$

1) On remplace la variable x par -2 dans l'expression, on obtient :
$F(-2) = 15 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 5 = 15 \times 4 + 6 - 5 = 60 + 1 = 61$

2) ■ $(2x + 3)(4x - 5) = 0$: On reconnaît un produit-nul, on applique donc la propriété : un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on obtient donc $(2x + 3)(4x - 5) = 0$ équivaut à $2x + 3 = 0$ ou $4x - 5 = 0$ équivaut à $x = \frac{-3}{2}$ ou $x = \frac{5}{4}$

■ $3x^2 + 7 = -6x^2 + 23$: On reconnaît une équation du second degré, on se ramène à un second membre nul.

D'où : $3x^2+7+6x^2-23=0$ équivaut à $9x^2-16=0$ on remarque alors que l'on peut factoriser en utilisant une identité remarquable : $(3x)^2-4^2=0$ équivaut à $(3x-4)(3x+4)=0$ équivaut à $3x-4=0$ ou $3x+4=0$
Ainsi $x=\frac{4}{3}$ ou $x=\frac{-4}{3}$

■ $\dfrac{x-3}{4}=2x+1$

Cette équation fait intervenir des fractions, on réduit les membres au même dénominateur. On obtient :
$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{4(2x+1)}{4}$ équivaut à $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{8x+4}{4}$
Deux fractions ayant même dénominateur sont égales si et seulement si leurs numérateurs sont égaux, d'où :
$x-3=8x+4$ équivaut à $x-8x=3+4$
équivaut à $-7x=7$ ainsi $x=-1$

A vous de jouer !

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :
1) $1-2x+3-5x=-x-1+2-4x$
2) $(2x+1)-3(5x+4)=2(x-4)-(3x-6)$
3) $(5x+4)(2x-3)=0$
4) $\dfrac{1}{2}x+2=\dfrac{1}{3}x-1$
5) $(2x-7)^2-(4x+3)^2=0$
6) $\dfrac{2x-3}{4}=\dfrac{3x-1}{2}$

Exercice 2 :
On considère l'expression $E=(3x+2)^2-(x-1)^2$
1) Développer et réduire l'expression E
2) Factoriser E
3) Résoudre l'équation $E=0$

Exercice 3 :
1) L'âge d'un père est le quadruple de celui de son fils. Quel est l'âge du père, sachant que, dans 20 ans, il ne sera plus que le double de celui de son fils ?
2) Bob a le double de l'âge de Joe. Il y a 10 ans, Bob avait quatre fois l'âge de Joe. Quels sont les âges de Bob et de Joe ?

Exercice 4 :
Lorsqu'il est brisé, un bambou de 1 mètre de hauteur a son extrémité qui touche le sol à une distance de 30 cm de sa base.

A quelle hauteur a-t-il été brisé ?

Enigme 4

Les parents Tchekhov ont trois filles. La moyenne d'âge des deux brunes est 11 ans, celle des deux frisées est 12 ans. Et la moyenne d'âge des trois est 10 ans. Quel est l'âge de l'ainée ?
A) 10 ans B) 11 ans C) 12 ans D) 14 ans E) 16 ans

Généralités sur les fonctions

Une carte mentale pour résumer le cours :

Les fonctions

Fonctions affines

Définition

Une fonction **affine** f est une fonction pour laquelle il existe deux nombres a et b et qui à tout nombre x associe le nombre $ax + b$.

On peut la noter $\boldsymbol{f : x \longmapsto ax + b}$

a est appelé le coefficient de linéarité de f

b est appelé terme constant de f

Exemples : $f : x \longmapsto 2x + 3$; $g : x \longmapsto -x + 5$; $k : x \longmapsto \frac{3}{5}x - 1$

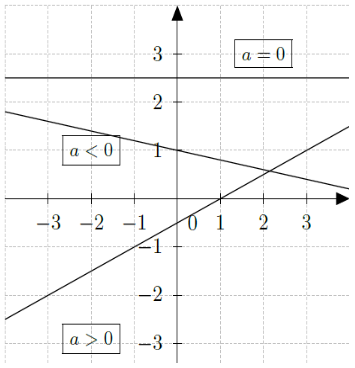
Si $a = 0$ f est une fonction **constante**

Représentation graphique

Dans un repère, c'est une droite qui passe par les points de coordonnées $(1;a)$ et $(0;b)$

$\boldsymbol{a}$ est appelé coefficient directeur de la droite.

b est appelé l'ordonnée à l'origine



Cas général

Définition

Une fonction f définie sur un ensemble E à valeur dans un ensemble F est une association de tout élément de E à un unique élément F que l'on note $f(x)$.

E est l'ensemble de départ de f.

F est l'ensemble d'arrivée de f.

$f(x)$ est l'image de x par la fonction f. **Elle est unique.**

x est un antécédent de $y = f(x)$ par la fonction f. **Il n'est pas toujours unique**.

Notation : $f : E \longrightarrow F$

$x \longmapsto f(x)$

antécédent image

Exemple : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 7$

ou $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 6x - 7$

Tableau de valeurs : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 7$

x	-4	-3	-2	-1	0	$\mathbf{1}$	2	3	← antécédents
$f(x)$	-15	2	5	0	-7	$\mathbf{-10}$	-3	20	← images

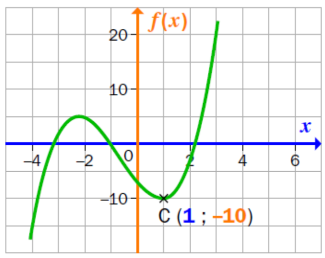
$$\boldsymbol{f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 - 6 \times 1 - 7}$$
$$\boldsymbol{= 1 + 2 - 6 - 7 = -10}$$

Courbe représentative

Soit f une fonction. On considère le plan muni d'un repère (O, I, J). La courbe représentative de f dans le repère, souvent notée Cf, est l'ensemble des points dont les coordonnées sont $(x, f(x))$ où on donne à x toutes les valeurs possibles.

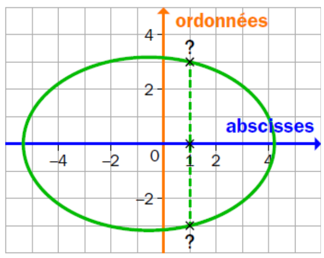
x est interprété comme une abscisse.

$f(x)$ est interprété comme une ordonnée.



C'est une fonction

- L'antécédent se lit sur l'axe des abscisses, et l'image sur l'axe des ordonnées.
  L'image de 1 est –10.
- Une image peut avoir plusieurs antécédents. Ici, 0 a trois antécédents : environ –3,2 ; –1 et 2,2



Ce n'est pas une fonction

On ne peut pas déterminer l'image de 1

Fonctions linéaires

Définition

Une fonction **linéaire** f est une fonction affine dont le terme constant b est nul. On la note $\boldsymbol{f : x \longmapsto ax}$

Les images sont proportionnelles aux antécédents

Représentation graphique

Dans un repère, c'est une droite qui passe par l'origine du repère

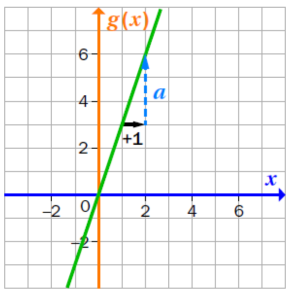


Tableau de valeurs : $\boldsymbol{f(x) = 3x}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9

$\times a$

C'est un tableau de proportionnalité de coefficient a (ici $a = 3$).

<u>Exemple</u> :
On considère la fonction f qui a tout nombre x associe le nombre $x^2 - 5$. On peut également noter $f : x \longmapsto x^2 - 5$.

• L'image de 4 par la fonction f est $4^2 - 5 = 16 - 5$, soit 13. On note $f(4) = 11$.
• L'image de −3 par la fonction f est $(-3)^2 - 5 = 9 - 5$, soit 4. On note $f(-3) = 4$.
• L'image de 0 par f est $0^2 - 5 = -5$. On note $f(0) = -5$.

• En reprenant les calculs précédents, on peut affirmer que 4 est un antécédent de 11 par f, que −3 est un antécédent de 4 par f et que 0 est un antécédent de −5 par f.

On peut remarquer que $f(-4) = (-4)^2 - 5$ qui vaut 11, comme $f(4)$, donc −4 est un autre antécédent de 11 par f.
On peut donner d'autres exemples de fonctions $g : x \longmapsto 3x + 1$, $h : x \longmapsto -7$ et $k : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$
où x est un nombre quelconque.

A vous de jouer !

<u>Exercice 1</u> : Parmi les quatre affirmations proposées pour chaque question, indiquez celles qui sont exactes. Il peut y avoir plusieurs réponses exactes.

1. Soit h la fonction définie par $h(x) = x(x+3)$ où x est un nombre quelconque.
a) L'image de 0 par h est 0. **b)** L'image de -1 par h est -2 **c)** L'image de 5 par h est 35
d) L'image de -3 par h est -3

2. Soit h la fonction définie par $h(x) = x(x+3)$ où x est un nombre quelconque.
a) Un antécédent de 8 par h est 2 **b)** Un antécédent de 9 par h est -6 **c)** Un antécédent de -2 par h est -2
d) Un antécédent de -10 par h est -3

3. Soit f la fonction définie pour x est un nombre quelconque différent de -2 par :
$$f(x) = \frac{x-4}{x+2}$$
$\boldsymbol{a})\ f(6) = \frac{2}{8}$ $\boldsymbol{b})\ f(6) = -\frac{1}{4}$ $\boldsymbol{c})\ f(6) = \frac{1}{4}$ $\boldsymbol{d})\ f(6) = 9$

4. On considère la fonction g définie par le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2	5
$g(x)$	1	0	4	-2	-1	0

a) L'image de 0 par g est 4 **b)** L'image de 1 par g est -2 **c)** L'image de 5 par g est 2
d) L'image de -2 par g est 1

5. On considère la fonction g définie par le tableau de valeurs ci-dessous :

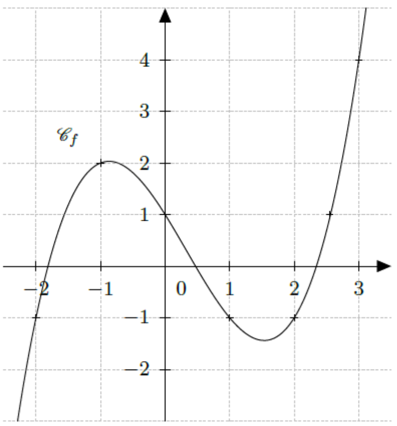
x	-2	-1	0	1	2	5
$g(x)$	1	0	4	-2	-1	0

a) Un antécédent de 4 par g est 0 **b)** Un antécédent de 1 par g est 2 **c)** Un antécédent de -2 par g est 1
d) Un antécédent de 3 par g est -8

Exercice 2 :

Parmi les quatre affirmations proposées pour chaque question, indiquez celles qui sont exactes. Il peut y avoir plusieurs réponses exactes.

On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-contre :



1)

a) L'image de 0 par f est 3 **b)** L'image de 1 par f est -1 **c)** L'image de -1 par f est 2
d) L'image de 3 par f est 3

2)

a) Un antécédent de 4 par f est 3 **b)** Un antécédent de 1 par f est 2,55 **c)** Un antécédent de -2 par f est 1
d) Un antécédent de 3 par f est 1,5

Exercice 3 :

Parmi les quatre affirmations proposées pour chaque question, indiquez celles qui sont exactes. Il peut y avoir plusieurs réponses exactes.

1. Un exemple de fonction affine est :

A	B	C	D
$f : x \mapsto 5x^2$	$f : x \mapsto 6x - 8$	$f : x \mapsto -9x$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3}$

2. Un exemple de fonction linéaire est :

A	B	C	D
$f : x \mapsto 5x^2$	$f : x \mapsto 6x - 8$	$f : x \mapsto -9x$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 3}$

3. Un exemple de fonction constante est :

A	B	C	D
$f : x \mapsto 5x^2$	$f : x \mapsto 6x - 8$	$f : x \mapsto -9x$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{3}$

4. On considère la fonction $f : x \mapsto 5x - 2$.L'image par f de -3 est :

A	B	C	D
5	$\dfrac{17}{2}$	-17	$\sqrt{2}$

5. On considère la fonction $g : x \mapsto -2x + 7$. Un antécédent par g de 12 est :

A	B	C	D
-5	$\dfrac{5}{2}$	$-\dfrac{5}{2}$	$\sqrt{2}$

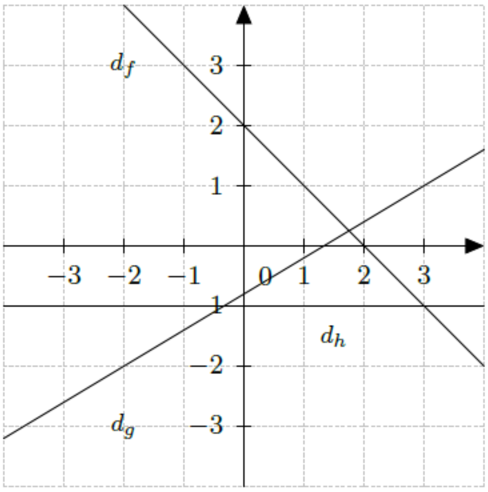
6. La droite représentative de la fonction affine $h: x \mapsto \frac{3}{2}x - 1$ passe par le point de coordonnées :

A	B	C	D
$(2; 4)$	$(-1; -4)$	$(0; -1)$	$(2; 2)$

7. La droite représentative de la fonction affine $h: x \mapsto -7x + 4$ a pour coefficient directeur :

A	B	C	D
4	1	7	-7

Les questions qui suivent sont basées sur le graphique ci-contre dans lequel sont tracées les droites représentatives de trois fonctions f, g et h.



8. Le coefficient de linéarité de f vaut :

A	B	C	D
3	-1	0	-7

9. L'image de -2 par la fonction g vaut :

A	B	C	D
0	-1	-2	8

10. Par la fonction h, les antécédents de -1 sont au nombre de :

A	B	C	D
0	1	2	Une infinité

11. La fonction f est la fonction :

A	B	C	D
$f: x \mapsto 0$	$f: x \mapsto -x$	$f: x \mapsto 2x + 1$	$f: x \mapsto -x + 2$

12. La fonction g est la fonction :

A	B	C	D
$g: x \mapsto 2x + 1$	$g: x \mapsto -2x - 1$	$g: x \mapsto \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$	$g: x \mapsto \frac{3}{2}x - 1$

Et après la seconde : Pourquoi choisir la spécialité maths en classe de 1$^{\text{ère}}$?

Les objectifs de la classe de 1$^{\text{ère}}$:

- Consolider les acquis de seconde.
- Développer le goût et la démarche mathématique (apprendre à réfléchir, à être rigoureux, à argumenter)
- Découvrir de nouveaux outils pour modéliser et comprendre.
- Approcher les concepts mathématiques
- Comprendre, maîtriser l'abstraction
- Découvrir les liens avec les autres spécialités.
- Préparer la poursuite d'études après le baccalauréat

La spécialité maths pour quelle orientation ?

Ecoles d'architecture
Faculté de psychologie
Prépas scientifiques
Prépas commerciales
Ecoles d'ingénieur
Faculté de médecine (PACES)
Ecoles de commerce
IEP
Faculté de sciences
Faculté d'économie
IUT
Ecoles d'infirmiers
STAPS
Ecoles de design
Faculté de sociologie
Ecoles d'orthophoniste
Ecoles de masseurs-kinésithérapeutes
ESPE