Livret de révision de Mathématiques

de la $2^{\text{ème}}$ à la $1^{\text{ère}}$ spécialité maths.

Corrigés

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat sous forme irréductible :

$$A=\frac{1}{6}-\frac{5}{9}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{6}{36}-\frac{20}{36}+\frac{9}{36}$$

$$=\frac{-5}{36}$$

$$B=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\left(\frac{24}{30}-\frac{25}{30}\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+3\times\left(-\frac{1}{30}\right)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{10}=\frac{-22}{120}=\frac{-11}{60}$$

$$C=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}}+1$$

$$=\frac{\frac{15}{10}-\frac{14}{10}}{\frac{8}{15}}+1$$

$$=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{8}{15}}+1$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{15}{8}+1$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{16}{16}=\frac{19}{16}$$

Exercice 2 : Calculer sans calculatrice.

$$A=\frac{5^{27}-5^{29}}{5^{28}}=\frac{5^{27}-5^{27+2}}{5^{27+1}}=\frac{5^{27}-5^{27}\times5^{2}}{5^{27}\times5^{1}}=\frac{\cancel{5^{27}}(1-5^{2})}{\cancel{5^{27}}\times5^{1}}=\frac{-24}{5}$$

$$B=\frac{2^{5}\times4^{-5}}{8}=\frac{2^{5}\times(2^{2})^{-5}}{2^{3}}=\frac{2^{5}\times2^{-10}}{2^{3}}=2^{5-10-3}=2^{-8}=\frac{1}{256}$$

$$C=\frac{3^{-6}\times5^{5}}{(5^{2})^{3}\times3^{-5}}=\frac{3^{-6}\times3^{5}}{5^{6}\times5^{-5}}=\frac{3^{-1}}{5^{1}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

$$D=\frac{8^{2}\times9^{-5}}{3^{-11}\times2^{8}}=\frac{(2^{3})^{2}\times(3^{2})^{-5}}{3^{-11}\times2^{8}}=\frac{2^{6}\times3^{-10}}{3^{-11}\times2^{8}}=2^{6-8}\times3^{-10+11}=2^{-2}\times3^{1}=\frac{3}{4}$$

$$E=\frac{3^{2023}+3^{2023}+3^{2023}}{3^{2023}}=\frac{3\times3^{2023}}{1\times3^{2023}}=3$$

Exercice 3 : Sans utiliser la calculatrice, écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}$ le plus petit possible.

$A=\sqrt{48}$;

$A=\sqrt{16\times3}$

$A=4\sqrt{3}$

$B=5\sqrt{27}-3\sqrt{48}$;

$B=5\sqrt{9\times3}-3\times4\sqrt{3}$

$B=15\sqrt{3}-12\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$C=\sqrt{36+64}$

$C=\sqrt{100}=10$

$C=10\sqrt{1}$

Exercice 4 : Ecrire sans radical au dénominateur et simplifier les expressions.

$$A=\frac{3}{2+\sqrt{7}}=\frac{3(2-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})}=\frac{6-3\sqrt{7}}{4-7}=\frac{6-3\sqrt{7}}{-3}=-2+\sqrt{7};$$

$$B=\frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5}=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}=2+\sqrt{5};$$

$$C=\frac{1+\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{3})(2-2\sqrt{3})}{(2+2\sqrt{3})(2-2\sqrt{3})}=\frac{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\times 3}{4-4\times 3}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$$

$$D=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}}\times\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{25}}=\frac{9}{\sqrt{121\times 2}}\times\frac{\sqrt{49\times 2}}{5}=\frac{9\times 7\cancel{\sqrt{2}}}{11\cancel{\sqrt{2}}\times 5}=\frac{63}{55}$$

Exercice 5 :

1. pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on a :

$$f(x)=2x-3+\frac{1}{x+1}=\frac{(2x-3)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+2x-3x-3+1}{x+1}=\frac{2x^2-x-2}{x+1}$$

Donc pour tout $x\neq -1$, on a :

$$f(x)=\frac{2x^2-x-2}{x+1}$$

2. a. $f\left(\frac{2}{3}\right)=2\times\frac{2}{3}-3+\frac{1}{\frac{2}{3}+1}=\frac{4}{3}-\frac{9}{3}+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{-5}{3}+\frac{3}{5}=\frac{-25+9}{15}=\frac{-16}{15};$

b. $f(\sqrt{5})=\frac{2(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})-2}{(\sqrt{5})+1}=\frac{10-\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}=\frac{8-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}=\frac{(8-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{8\sqrt{5}-8-5+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{9\sqrt{5}-13}{4}$

c. $f(\sqrt{3}-1)=\frac{2(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{3}-1)-2}{(\sqrt{3}-1)+1}=\frac{2(3-2\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}+1-2}{\sqrt{3}}=\frac{7-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{(7-5\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$$=\frac{7\sqrt{3}-15}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{3}-5$$

Exercice 6 *:

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On calcule $\Phi^2-\Phi-1$:

$$\Phi^2-\Phi-1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-1=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{2+2\sqrt{5}}{4}-\frac{4}{4}=\frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}=0$$

On a ainsi montré que $\Phi^2-\Phi-1=0$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1\times(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=\frac{1\times(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}{n-(n+1)}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-n-1}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}$$

$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

On a donc montré que pour tout entier n naturel :

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

3. Pour tout entier naturel n, $2^n+2^n=2\times 2^n=2^1\times 2^n=2^{n+1}$

On a donc montré que pour tout entier n naturel : $2^n+2^n=2^{n+1}$

Exercice 7 **:

1. $A = \sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$, en effet $3-\pi$ est un nombre négatif.

2. $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, on remarque que $B^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

Ainsi $C = \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}$.

Or $\sqrt{3}-\sqrt{2} > 0$ donc $C = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2} = B$.

On a donc prouvé que $B = C$

3. $D = \sqrt{10-2\sqrt{21}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}-\sqrt{3}$. En effet $\sqrt{3}-\sqrt{7} < 0$

Donc $D \neq E$

4. $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}$ On remarque $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

Donc $3-\sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2$

Et $3+\sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$

Ainsi $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| - \left|1+\sqrt{2}\right|$

$= -1 + \sqrt{2} - \left(1+\sqrt{2}\right) = -2$

En effet $1-\sqrt{2} < 0$ donc $\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = -1+\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2} > 0$ donc $\left|1+\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2}$

Ainsi F est un nombre entier

<u>Exercice guidé</u> : développer des expressions

Complète les pointillés :

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x)$

$A = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x$ donc $A = 33x^2 - 13x - 4$

<u>Exercice guidé</u> : factoriser des expressions.

Complète les pointillés

$A = 6x + 3 + 4(2x+1)^2$

$A = 3(2x+1) + 4(2x+1)(2x+1)$

$A = (2x+1)(3 + 4(2x+1))$

$A = (2x+1)(3 + 8x + 4)$ donc $A = (2x+1)(7+8x)$

<u>Exercice guidé</u> : factoriser des expressions.

Complète les pointillés

$A = 36x^2 - (5x+1)^2$

$A = (6x)^2 - (5x+1)^2$

$A = ((6x) + (5x+1))((6x) - (5x+1))$

$A = (6x + 5x + 1)(6x - 5x - 1)$ donc $A = (11x+1)(x-1)$

<u>Exercice guidé</u> : écrire sous d'une seule fraction

Compléter les pointillés.

$$\mathrm{A} = 4 + \frac{10}{x-5}$$

$$A = \frac{4\times(x-5)}{x-5} + \frac{10}{x-5}$$

$$A = \frac{(4x+(-20))}{x-5} + \frac{10}{x-5} \quad donc\ A = \frac{4x-10}{x-5}$$

Exercice 8 : Développer et réduire les expressions suivantes

$A = (2x-9)(3-2x) + 5(2x+1)^2 = 6x - 4x^2 - 27 + 18x + 5(4x^2+4x+1) = 16x^2 + 44x - 22$

$B = 4(x-6)^2 - 3(5x+3)(5x-3) = 4(x^2-12x+36) - 3(25x^2-9) = -71x^2 - 48x + 171$

$C = (6x-7)^2 + (5x+10)^2 = (36x^2 - 84x + 49) + (25x^2 + 100x + 100) = 61x^2 + 16x + 149$

$D = -(8x+4)(3x-10) - (6x-3)(6x+3) = -(24x^2 - 80x + 12x - 40) - (36x^2 - 9) = -60x^2 + 68x + 49$

$E = (5-2x^2)^2 = 25 - 20x^2 + 4x^4$

$F = (ax+by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$

$G = (2ab^2 - 3c^3d^4)^2 = 4a^2b^4 - 12ab^2c^3d^4 + 9c^6d^8$

Exercice 9 : Factoriser les expressions suivantes

$A = 2(5x-1)^2 + 10x - 2 = 2(5x-1)^2 + 2(5x-1) = 10x(5x-1)$

$B = (x^2-4) - (x+2)^2 = (x-2)(x+2) - (x+2)(x+2) = -4(x+2)$

$C = (4x-3)^2 - 25x^2 = \big((4x-3)-5x\big)\big((4x-3)+5x\big) = (-x-3)(9x-3) = -3(x+3)(3x-1)$

$D = 49 - (7x+2)^2 = \big(7-(7x+2)\big)\big(7+(7x+2)\big) = (-7x+5)(7x+9)$

Exercice 10 *: Factoriser au mieux les expressions suivantes :

$A = 9ab - 6a^2 + 12ab^2 = 3a(3b - 2a + 4b^2)$

$B = 16(a-b) - x^4(a-b) = (a-b)(16-x^4) = (a-b)(4-x^2)(4+x^2) = (a-b)(2-x)(2+x)(4+x^2)$

$C = 7a^2x - 7a^2y - 2bx + 2by = 7a^2(x-y) - 2b(x-y) = (x-y)(7a^2-2b)$

$D = (x-y)^{2n} - 4x(x-y)^{2n+1} + y(x-y)^{2n+2} = (x-y)^{2n}(1 - 4x(x-y) + y(x-y)^2)$

Exercice 11 ** :

1) On a : $2x + 3y = 3$ et $xy = -4$.
   Or $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 4x^2 + 9y^2 + 12 \times (-4) = 4x^2 + 9y^2 - 48$
   Or $(2x+3y)^2 = 3^2 = 9$
   Donc $9 = 4x^2 + 9y^2 - 48$
   Ainsi $4x^2 + 9y^2 = 9 + 48 = 57$

2) On a : $x + y = 4$ et $xy = -3$.
Or $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
Donc $4^2 = x^2 + y^2 - 6$
D'où $x^2 + y^2 = 16 + 6 = 22$

On a : $((x^2+y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$
D'où $22^2 = x^4 + y^4 + 2 \times (-3)^2$
Ainsi $484 = x^4 + y^4 + 18$ et $x^4 + y^4 = 484 - 18 = 466$

Exercice 12 : Ecrire sous la forme d'une seule fraction les expressions suivantes :

$$A = \frac{2x}{3x-1} - 5 = \frac{2x - 5(3x-1)}{3x-1} = \frac{-13x+5}{3x-1}$$

$$B = \frac{4}{2x+6} - \frac{3}{x-5} = \frac{4(x-5) - 3(2x+6)}{(2x+6)(x-5)} = \frac{-2x-38}{(2x+6)(x-5)} = \frac{-x-19}{(x+3)(x-5)}$$

Exercice 13 :

Soit x la largeur d'un rectangle. La longueur du rectangle est égale à $x + 7$.

1. Le périmètre de ce rectangle est $2 \times (x + x + 7) = 2 \times (2x + 7) = 4x + 14$.
2. L'aire de ce rectangle est $x \times (x + 7) = x^2 + 7x$.
3. Si $x = 13$ alors son périmètre est de $4 \times 13 + 14 = 66$ cm
   et son aire est de $13^2 + 7 \times 13 = 260$ cm².

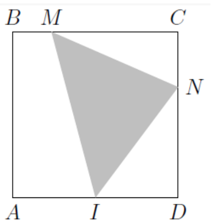
Exercice 14 :

Première formule : le prix payé pour x entrées est de $20 + 2x$
Deuxième formule : le prix payé pour pour x entrées : $5x$

2. Première formule : le prix payé pour 4 entrées est de $20 + 2 \times 4 = 28$ €
Deuxième formule : le prix payé pour pour 4 entrées : $5 \times 4 = 20$ €
La formule la plus avantageuse est la deuxième formule.

Première formule : le prix payé pour 25 entrées est de $20 + 2 \times 25 = 70$ €
Deuxième formule : le prix payé pour pour 25 entrées : $5 \times 25 = 125$ €
La formule la plus avantageuse est la première formule.

Exercice 15 :



$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de $[AD]$.
M est un point de $[BC]$ et N un point de $[CD]$ tels que $BM = CN = x$.

$Aire(triangle\ IMN)$
$= aire\ (carré\ ABCD) - aire\ (trapèze\ IABM) - aire(triangle\ MCN) - aire(triangle\ IDN)$.

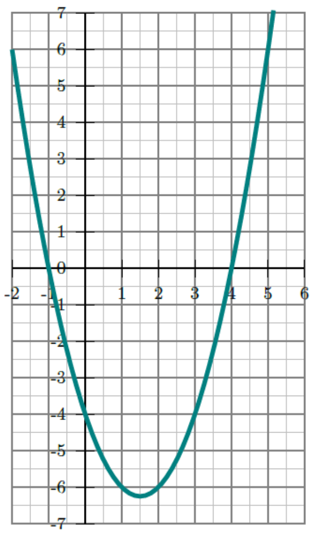
$$= AB^2 - \frac{AB \times (BM + AI)}{2} - \frac{MC \times CN}{2} - \frac{ID \times DN}{2}$$

$$= 36 - \frac{6 \times (x + 3)}{2} - \frac{(6 - x) \times x}{2} - \frac{3 \times (6 - x)}{2}$$

$$= \frac{72 - 6x - 18 - 6x + x^2 - 18 + 3x}{2} = \frac{x^2 - 9x + 36}{2}$$

L'aire du triangle est donc de $\frac{x^2 - 9x + 36}{2}$ cm²

Exercice 16 :



a. Graphiquement, on cherche l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est 5.
$f(5) = 6$. L'image de 5 par la fonction f est 6.
b. $f(5) = 5^2 - 3 \times 5 - 4 = 25 - 15 - 4 = 6$

2. Graphiquement, on cherche les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est 0.
Les antécédents de 0 par f sont -1 et 4

3. $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = -4$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$
$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ (x - 3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 3$
Les solutions de l'équation sont 0 et 3.

4. Le tableau de variation de la fonction f .

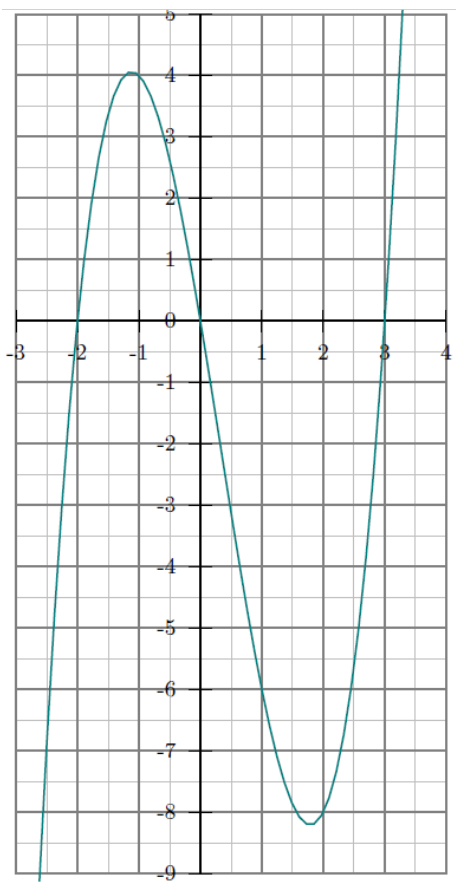
x	$-\infty$		$1{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-6{,}25$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

x	$-\infty$		-0.5		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 17 :

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



1. a. Graphiquement, on cherche l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est $\frac{-3}{2}$. L'image de $\frac{-3}{2}$ par f est approximativement $\frac{7}{2}$

b. $f\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\right)^3 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 6 \times \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{27}{8} = 3.375$.

2. a. $(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$

b. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x = x(x^2 - x - 6)$
$= x(x-3)(x+2)$

c. On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x-3) = 0 \text{ ou } (x+2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -2$

d. On cherche les abscisses des points de la courbe qui ont pour ordonnée 0. Il y a trois solutions : -2 ; 0 et 3

3. Le tableau de variation de la fonction f est.

x	$-\infty$	-1	1.75	$+\infty$
variation de f		4	-8.25	

4. En utilisant la factorisation de f, dresser le tableau de signes de f.

$a = 1$
$a = 1$
$a = 1$

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5. a. On cherche les abscisses des points de la courbe qui ont pour ordonnée -6. Il y a trois solutions : -2,5 ; 1 et 2,5

b. $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ et $-6x + 6 = -6(x-1)$.

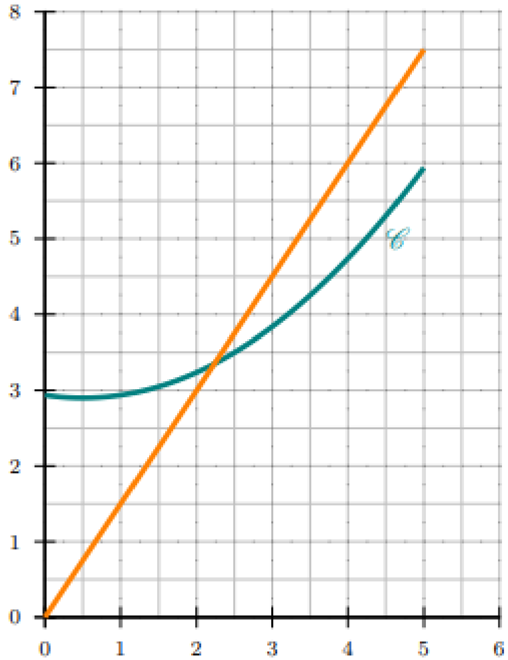
c. $f(x) = -6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = -6$
$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 6(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right) = 0$
$\Leftrightarrow (x-1) = 0 \text{ ou } \left(x-\sqrt{6}\right) = 0 \text{ ou } \left(x+\sqrt{6}\right) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6}$

Exercice 18 :

On a $f(x) = 0,15x^2 - 0,15x + 2,9375$
La courbe C représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.

1. Graphiquement, $f(x)$ semble minimal pour $x = 0.5$ Ainsi le coût semble minimal pour une production de 50 cartes à puces.
2. Chaque carte fabriquée est vendue 1,50 €.
   $R(x) = 1.5 \times x$: recette perçue pour la vente de x centaines de cartes.

3. Représentation graphique de la fonction R.



4. $B(x) = R(x) - f(x) = 1.5x - (0.15x^2 - 0.15x + 2.9375) = -0.15x^2 + 1.65x - 2.9375$

5. L'entreprise réalise un bénéfice si $B(x) > 0$.
En utilisant le graphique, $B(x) >$ si la courbe représentative de f est en dessous de la droite représentant la recette. D'où $B(x) > 0$ si $x > 2.2$. La quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice est de 220 cartes à puces (Valeur approchée à la dizaine près).

Exercice 19 : Résoudre les équations suivantes

$\boldsymbol{a})\ 3(2x - 3) + 3x = 5x - 2(5 - 9x) \Leftrightarrow 6x - 9 + 3x = 5x - 10 + 18x$

$$\Leftrightarrow -14x = -1 \ \Leftrightarrow x = \frac{1}{14}$$

$\boldsymbol{b})\ 2x + 3 = -3x + 7 \ \Leftrightarrow 5x = 4 \ \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

$\boldsymbol{c})\ -4x + 1 = 9 \ \Leftrightarrow -4x = 8 \ \Leftrightarrow x = -2$;

$\boldsymbol{d})\ (-x - 4)(-x + 7) = 0 \ \Leftrightarrow -x - 4 = 0\ ou -x + 7 = 0 \ \Leftrightarrow x = -4\ ou\ x = 7$

$\boldsymbol{e})\ 9(-3x - 1)(6x - 36) = 0 \ \Leftrightarrow -3x - 1 = 0\ ou\ 6x - 36 = 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}\ ou\ x = 6$

$\boldsymbol{f})\ -x(x + 16)(2 - 5x) = 0 \ \Leftrightarrow -x = 0\ ou\ x + 16 = 0\ ou\ 2 - 5x = 0 \ \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = -16\ ou\ x = \frac{2}{5}$

$\boldsymbol{g})\ \frac{4x - 7}{5x + 3} = 0 \ \Leftrightarrow 4x - 7 = 0\ et\ 5x + 3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{4}\ et\ x \neq \frac{-3}{5}$$

Donc $S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$

Ne pas oublier la valeur interdite, il faut toujours définir l'ensemble de définition de l'équation rationnelle.

$\boldsymbol{h})\ \frac{-2 + 10x}{2x + 4} = \frac{5x}{x - 4} \ \Leftrightarrow \frac{-2 + 10x}{2x + 4} - \frac{5x}{x - 4} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2 + 10x)(x - 4)}{(2x + 4)(x - 4)} - \frac{(5x)(2x + 4)}{(x - 4)(2x + 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-2 + 10x)(x - 4) - (5x)(2x + 4)}{(2x + 4)(x - 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x + 8 + 10x^2 - 40x - 10x^2 - 20x}{(2x + 4)(x - 4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-62x + 8}{(2x + 4)(x - 4)} = 0$$

$\Leftrightarrow -62x + 8 = 0 \; et \; 2x + 4 \neq 0 \; et \; x - 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{8}{62} = \dfrac{4}{31} \; et \; x \neq -2 \; et \; x \neq 4$

Donc $S = \left\{\dfrac{4}{31}\right\}$

i) $|x - 7| = 2 \Leftrightarrow x = 7 - 2 = 5 \; ou \; x = 7 + 2 = 9$

j) $|x + 2| = 5 \Leftrightarrow x = -2 + 5 = 3 \; ou \; x = -2 - 5 = -7$

k) $|x - 10| = -5$ Impossible : une valeur absolue est toujours positive !

Exercice 20 *: Résoudre les équations suivantes

a) $2(x-1)(x-3.5) = 4x^2 - 28x + 49 \Leftrightarrow 2(x-1)(x-3.5) = (2x-7)^2$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-3.5) - (2x-7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-3.5) - (2x-7)(2x-7) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2 \times x - 2 \times 3.5) - (2x-7)(2x-7) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x-7) - (2x-7)(2x-7) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x-7) - (2x-7)(2x-7) = 0$

$\Leftrightarrow (2x-7)[(x-1) - (2x-7)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x-7)(-x+6) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \; ou - x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2} \; ou \; x = 6$

b) $x + 1 = \dfrac{9}{x+1} \Leftrightarrow x + 1 - \dfrac{9}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x+1} - \dfrac{9}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2 - 9}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1+3)(x+1-3)}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+4)(x-2)}{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow x + 4 = 0$ ou $x - 2 = 0$ et $x + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 2 \; et \; x \neq -1$

Donc $S = \{-4; 2\}$

c) $\dfrac{3x-1}{x-5} = \dfrac{3x-4}{x} \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x-5} - \dfrac{3x-4}{x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-1) \times x}{(x-5) \times x} - \dfrac{(3x-4)(x-5)}{x \times (x-5)} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3x-1) \times x - (3x-4)(x-5)}{(x-5) \times x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - x - (3x^2 - 15x - 4x + 20)}{(x-5) \times x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x^2 - x - 3x^2 + 15x + 4x - 20}{(x-5) \times x} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{18x - 20}{(x-5) \times x} = 0$

$\Leftrightarrow 18x - 20 = 0$ et $x - 5 \neq 0$ et $x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{20}{18} = \dfrac{10}{9} \; et \; x \neq 5 \; et \; x \neq 0$

Donc $S = \left\{\dfrac{10}{9}\right\}$

d) $\dfrac{16x^2-25}{2x-3}=\dfrac{4x-5}{3} \Leftrightarrow \dfrac{16x^2-25}{2x-3}-\dfrac{4x-5}{3}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{(16x^2-25)\times 3}{(2x-3)\times 3}-\frac{(4x-5)\times(2x-3)}{3\times(2x-3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(16x^2-25)\times 3-(4x-5)\times(2x-3)}{(2x-3)\times 3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4x-5)(4x+5))\times 3-(4x-5)\times(2x-3)}{(2x-3)\times 3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4x-5)[3(4x+5)-(2x-3)]}{(2x-3)\times 3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4x-5)(10x+18)}{(2x-3)\times 3}=0$$

$$\Leftrightarrow 4x-5=0\ ou\ 10x+18=0\ et\ 2x-3\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\ ou\ x=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}\ et\ x\neq\frac{3}{2}$$

Donc $S=\left\{-\frac{9}{5};\frac{5}{4}\right\}$

Exercice 21* :

1) a) En utilisant une identité remarquable, on a :

$$x^2+2x=(x+1)^2-1$$

b) $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1-8=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-9=0.$$

c) Donc $x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-9=0$

$$\Leftrightarrow (x+1-3)(x+1+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\ ou\ x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=2\ ou\ x=-4$$

2) $x^2+12x+11=0 \Leftrightarrow (x+6)^2-36+11=0$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2-25=0$$

$$\Leftrightarrow (x+6-5)(x+6+5)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+11)=0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0\ ou\ x+11=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=-11$$

Exercice 22 :

$a)$ $6x+7>4x+10 \Leftrightarrow 2x>3$

$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ donc $S=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

$b)$ $x+3\leq 9x+36 \Leftrightarrow -8x\leq 33$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{33}{8}$ donc $S=\left[\frac{-33}{8};+\infty\right[$

Exercice 23 :

1. $P(x) = (-3x + 12)(7 - 2x)$

$a = -3$

$a = -2$

x	$-\infty$		3.5		4		$+\infty$
$-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$	
$7-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-3x+12)(7-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Donc $S = \left[\frac{7}{2} ; 4\right]$

Exercice 24 :

1.

$$Q(x) = \frac{-2x+5}{x-3}$$

$a = -2$

$a = 1$

x	$-\infty$		2.5		3		$+\infty$
$-2x+5$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-2x+5}{x-3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

2. $Q(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2.5; 3[$

Donc $S = [2.5; 3[$

Exercice 25 :

Résoudre les inéquations suivantes

$a)$ $(-7x+8)(5x-3) \leq 0$

$a = -7$

$a = 5$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$\frac{8}{7}$		$+\infty$
$-7x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-7x+8)(5x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$Donc$ $S = \left]-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{8}{7} ; +\infty\right[$

$b) \; -4x(2x+3)(-6x-5) > 0$

$a = -4$

$a = 2$

$a = -6$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		0		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$-4x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-6x+5$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-4x(2x+3)(-6x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$Donc \; S = \left]-\frac{3}{2}; 0\right[\cup \left]\frac{5}{6}; +\infty\right[$

$d) \; \frac{3x+9}{x-5} < 0$

$a = 3$

$a = 1$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+9}{x-5}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$Donc \; S =]-3; 5[$

$e) \; \frac{-6x-7}{1+x} \geq 0$

$a = -6$

$a = 1$

x	$-\infty$		$\frac{-7}{6}$		-1		$+\infty$
$-6x-7$		$+$	0	$-$		$-$	
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-6x-7}{1+x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$Donc \; S = \left[-\frac{7}{6}; -1\right[$

Exercice 26 :

$a) \; (5x+2)^2 - (5x+2)(-3x-7) > 0 \Leftrightarrow (5x+2)(5x+2+3x+7) > 0$
$\Leftrightarrow (5x+2)(8x+9) > 0$

$a = 5$

$a = 8$

x	$-\infty$		$\frac{-9}{8}$		$\frac{-2}{5}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$8x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5x+2)(8x+9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Donc \; S = \left]-\infty; -\frac{9}{8}\right[\cup \left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[$

$b)\ (3x-2)^2 < 49 \Leftrightarrow (3x-2)^2 - 49 < 0$

$\Leftrightarrow (3x-2-7)(3x-2+7) < 0$

$\Leftrightarrow (3x-9)(3x+5) < 0$

$a = 3$

$a = 3$

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-9)(3x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left]-\frac{5}{3}\,;3\right[$

$c)\ 5 + \frac{1}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+21}{x+4} \geq 0$

$a = 5$

$a = 1$

x	$-\infty$		$\frac{-21}{5}$		-4		$+\infty$
$5x+21$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{5x+21}{x+4}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $S = \left]-\infty; -\frac{21}{5}\right] \cup]-4; +\infty[$

$d)\ \frac{3}{2x-1} \geq \frac{2}{-3x+15} \Leftrightarrow \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{-3x+15} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3(-3x+15)}{(2x-1)(-3x+15)} - \frac{2(2x-1)}{(-3x+15)(2x-1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3(-3x+15) - 2(2x-1)}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-9x+45-4x+2}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-13x+47}{(2x-1)(-3x+15)} \geq 0$

$a = -13$

$a = 2$

$a = -3$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{47}{13}$		5		$+\infty$
$-13x+47$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-3x+15$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-13x+47}{(2x-1)(-3x+15)}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc $S = \left]\frac{1}{2}; \frac{47}{13}\right] \cup]5; +\infty[$

Exercice 27 * :

1) $x + y = 20 \; donc \; y = 20 - x$
2) $P = xy = x(20 - x)$
$P > 91 \Leftrightarrow x(20 - x) - 91 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 91 > 0$
Or $(7 - x)(x - 13) = 7x - 91 - x^2 + 13x = -x^2 + 20x - 91$
Donc $-x^2 + 20x - 91 > 0 \Leftrightarrow (7 - x)(x - 13) > 0$
D'où $P > 91 \Leftrightarrow (7 - x)(x - 13) > 0$
3)

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
$7-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-13$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(7-x)(x-13)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]7; 13[$
Les nombres sont strictement compris entre 7 et 13.

Exercice 28 *:

Résoudre les inéquations suivantes
$a)$ $(5x + 1)^2 + 9 \leq 0$ C'est une somme de termes positifs dont l'un est strictement positif, cette somme ne peut être négative !
$S = \emptyset$

$$b) \; \frac{4x^3 - 9x}{x^2 - 16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(4x^2 - 9)}{(x - 4)(x + 4)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(2x - 3)(2x + 3)}{(x - 4)(x + 4)} \geq 0$$

	x	$-\infty$		-4		$\frac{-3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$a = 1$	x		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$a = 2$	$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$a = 2$	$2x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$a = 1$	$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$a = 1$	$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
	$\frac{3x(2x-3)(2x+3)}{(x-4)(x+4)}$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

$$Donc \; S = \left]-4; \frac{-3}{2}\right] \cup \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \,]4; +\infty[$$

$c)$ $(3x + 2)^2 - (x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow [(3x + 2) + (x - 1)][(3x + 2) - (x - 1)] \leq 0$
$\Leftrightarrow (4x + 1)(2x + 3) \leq 0$

	x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{4}$		$+\infty$
$a = 2$	$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$a = 4$	$4x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
	$(2x+3)(4x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left[\frac{-3}{2} ; \frac{-1}{4}\right]$

$d)\ \frac{5x+3}{3x+5} \leq \frac{3x+5}{5x+3} \Leftrightarrow \frac{(5x+3)\times(5x+3)}{(3x+5)\times(5x+3)} \leq \frac{(3x+5)\times(3x+5)}{(5x+3)\times(3x+5)}$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x+3)^2}{(3x+5)\times(5x+3)} - \frac{(3x+5)^2}{(5x+3)\times(3x+5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5x+3)^2-(3x+5)^2}{(3x+5)\times(5x+3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[(5x+3)-(3x+5)][(5x+3)+(3x+5)]}{(3x+5)\times(5x+3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-2)(8x+8)}{(3x+5)(5x+3)} \leq 0$$

	x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		-1		$\frac{-3}{5}$		1		$+\infty$
$a = 2$	$2x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$a = 8$	$8x+8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$a = 3$	$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$a = 5$	$5x+3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
	$\frac{(2x-2)(8x+8)}{(3x+5)(5x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $S = \left]\frac{-5}{3} ; -1\right] \cup \left]\frac{-3}{5} ; 1\right]$

Exercice 29 :

Dans un club de sport, il y a 450 adhérents dont 54 pratiquent le volley-ball.

1) $\frac{54}{450} = \frac{12}{100}$

Le pourcentage d'adhérents qui pratiquent le volley-ball est de 12%

2) $1 - 12\% = 88\%$

Le pourcentage d'adhérents qui ne pratiquent pas le volley-ball est de 88%

Exercice 30 :

Il y a 800 élèves au lycée Alfred Hitchcock.

Dans ce lycée,

- 15% des élèves sont des filles de Première ;
- 48% des élèves de Première sont des filles ;
- 25% des filles du lycée sont en Première.

1) $\frac{15}{100} \times 800 = 120;$

$\frac{48}{100} \times \textit{élèves de Première} = 120 \textit{ donc élèves de première} = 120 \times \frac{100}{48} = 250$

$\frac{25}{100} \times \textit{élèves filles du lycée} = 120 \textit{ donc élèves filles du lycée} = 120 \times \frac{100}{25} = 480$

120 élèves sont des filles de Première ; 250 élèves sont en première ; 480 élèves du lycée sont des filles

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant les calculs utiles.

Classe \ Sexe	Filles	Garçons	Total
Premières	120	130	250
Autres	360	190	550
Total	480	320	800

2) Le pourcentage d'élèves de Première dans ce lycée :
$\frac{250}{800} = 0.3125 = 31.25\%$
Il y a donc 31,25% d'élèves de ce lycée qui sont en Première.

Exercice 31 :

1) Soit P le prix initial. Le coefficient multiplicateur correspondant à la première augmentation de 10% est 1.1, le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 10% est 0.9.
Le prix final est donc $P \times 1.1 \times 0.9 = P \times 0.99$
Le coefficient global est de 0.99 et $0.99 < 1$ Ainsi l'évolution globale est donc une diminution de 1%. Le prix final est donc inférieur au prix initial.

2) Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation de 20% est 1.2
Le coefficient multiplicateur réciproque est donc $CM_R = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6} \approx 0.833$ au millième près

$$t = 1 - 0.833 = 0.167 = 16.7\%$$

Son nouveau prix doit donc baisser de 16.7% pour retrouver son prix initial

3) Soit P le prix initial.
$P \times 1.07 \times 1.15 \times 0.9 \times 0.8 \times 1.12 \ \times \approx \ 0.9923$ à 10^{-4}près.
$t = 1 - 0.9923 = 0.0077 = 0.77\%$
Le pourcentage global de variations est de 0.77%

Exercice 32 :

Prix initial	Prix final	Taux d'évolution en pourcentage	Coefficient multiplicateur
17 €	19.38 €	$+ 14\%$	1.14
150 €	120 €	$-20\ \%$	0.8
544 €	497.76 €	$-8.5\ \%$	0,915
8.90 €	11 €	$+ 23.7\%$	1,237
4 €	4.29 €	$+ 7{,}3\ \%$	1.073
123 €	132 €	$+ 7{,}3\ \%$	1.073
11 €	9,5 €	$-13.6\ \%$	0.864

Exercice 33 :

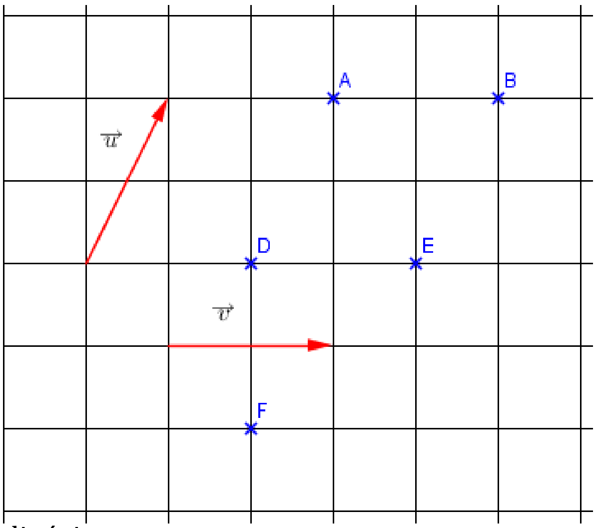
Pour chaque affirmation, la (ou les) réponse(s) correcte(s)sont surlignées.

1. $REVI$ est un parallélogramme, alors :

a. $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{VI}$ ***b.*** $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{VI}$ ***c.*** $\overrightarrow{RV} = \overrightarrow{EI}$ ***d.*** $\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{VE}$

2. $SION$ est un parallélogramme, alors :

a. $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IO}$ ***b.*** $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}$ ***c.*** $\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ON}$ ***d.*** $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IO}$



3. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{CA}$ ***b.*** $\overrightarrow{DA}$ ***c.*** $\overrightarrow{BE}$ ***d.*** $\overrightarrow{FE}$

4. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{EA}$ ***b.*** $\overrightarrow{CB}$ ***c.*** $\overrightarrow{FE}$ ***d.*** $\overrightarrow{DB}$

5. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est égal à :

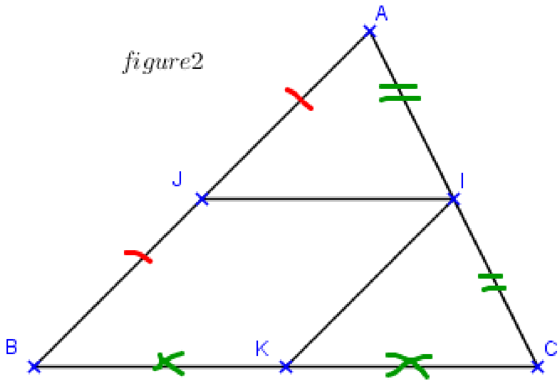
a. $\overrightarrow{EA}$ ***b.*** $\overrightarrow{CB}$ ***c.*** $\overrightarrow{FE}$ ***d.*** $\overrightarrow{DB}$

6. Dans la figure ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ est égal à :

a. $\overrightarrow{EA}$ ***b.*** $\overrightarrow{CB}$ ***c.*** $\overrightarrow{FE}$ ***d.*** $\overrightarrow{DB}$

7. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont :

a. colinéaires ***b.*** égaux ***c.*** opposés ***d.*** non colinéaires



8. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont :

a. *colinéaires* ***b.*** égaux ***c.*** opposés ***d.*** *non colinéaires*

9. Dans la figure 2 ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont :

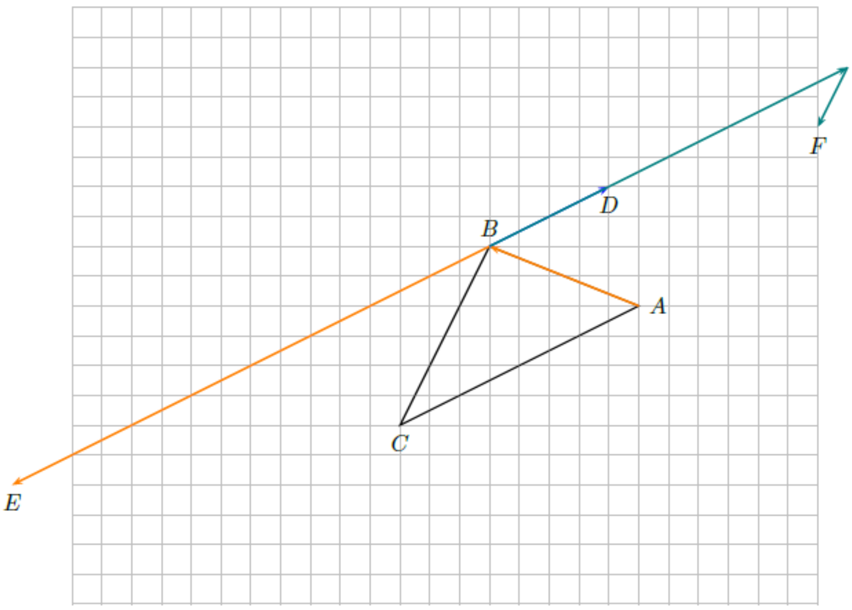
a. *colinéaires* ***b.*** égaux ***c.*** opposés ***d.*** *non colinéaires*

10. Dans la figure 2 ci-contre, quelles égalités sont vraies :

a. $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ***b.*** $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{IK}$ ***c.*** $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BK}$

d. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}$

Exercice 34 :



Exercice 35 *:

Dans un parallélogramme $ABCD$, on considère les points E et F définis par :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 3.\overrightarrow{AD}$$

C, E et F sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$: $ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$

De plus, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + 3.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + 3.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CF} = 2.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = -2.\overrightarrow{CE}$

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Les points C, E et F sont alignés

Exercice 36 *:

Soit un triangle ABC. On considère les points K, L et M milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$, P le milieu de $[LC]$ et Q le symétrique de K par rapport à B.

1. L est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

P est le milieu de $[LC]$ donc $\overrightarrow{LP} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{LC} = \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LP}$ d'après la relation de Chasles.

Donc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}.\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Ainsi dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, P a pour coordonnées $(0; \frac{3}{4})$.

M est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Ainsi dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, M a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

K est le milieu de $[BA]$ donc $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Q est le symétrique de K par rapport au point B donc B est le milieu de $[KQ]$ d'où $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Ainsi dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$, Q a pour coordonnées $(\frac{3}{2}; 0)$.

2. P, M et Q sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

si et seulement si $det\left(\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PQ}\right) = 0$

On calcule $det\left(\overrightarrow{PM}; \overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - 0 & \frac{3}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} & 0 - \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires. Donc les points P, M et Q sont alignés.

Exercice 37 :

On considère dans un repère $(O\,; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} ; \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} ; A\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} ; \quad B\begin{pmatrix}0.5\\-1\end{pmatrix} \quad et\ C\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

1. $\vec{u} + \vec{v}$ $\begin{pmatrix}2-2\\3+5\end{pmatrix}$; $\vec{u} + \vec{v}$ $\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}$; $-3\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-9\end{pmatrix}$; $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ $\begin{pmatrix}-6-4\\-9+10\end{pmatrix}$; $-3\vec{u} + 2\vec{v}$ $\begin{pmatrix}-10\\1\end{pmatrix}$

2. $AB = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}}} = \sqrt{(0.5+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$.

2. E milieu de $[BC]$

$E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times 5.5\\ \frac{1}{2}\times 0\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}\frac{11}{4}\\ 0\end{pmatrix}$.

3. D est le symétrique de B par rapport à A. Donc A est le milieu de $[BD]$

D'où $\begin{cases}x_A = \frac{1}{2}(x_B + x_D)\\ y_A = \frac{1}{2}(y_B + y_D)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + x_D)\\ 3 = \frac{1}{2}(-1 + y_D)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_D\\ 3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{9}{4} = \frac{1}{2}x_D\\ \frac{7}{2} = \frac{1}{2}y_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{18}{4} = x_D\\ \frac{14}{2} = y_D\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{9}{2} = x_D\\ 7 = y_D\end{cases}$

Donc $D(-\frac{9}{2}; 7)$

4. F est défini tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.

Ainsi $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$

D'où $\begin{cases}x_{\overrightarrow{AF}} = x_{\overrightarrow{BC}}\\ y_{\overrightarrow{AF}} = y_{\overrightarrow{BC}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_F - x_A = 4.5\\ y_F - y_A = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_F + 2 = 4.5\\ y_F - 3 = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_F = 2.5\\ y_F = 5\end{cases}$

Donc $F(\frac{5}{2}; 5)$

Exercice 38 :

On considère dans un repère $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath}\,)$

$$A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} ;\quad B\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix} ;\quad C\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} ; D\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} ;\quad E\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

1. A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

si et seulement si $det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

On calcule $det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}7+1 & 5+1\\ -1-3 & 0-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}8 & 6\\ -4 & -3\end{vmatrix} = -8\times 3 + 4\times 6 = -24 + 24 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et C sont alignés.

2. (AB) et (DE) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires

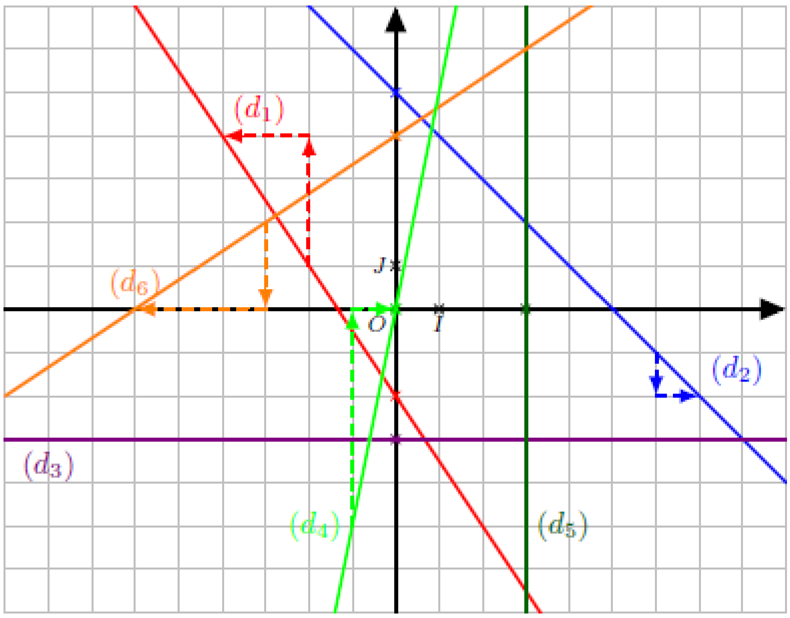
si et seulement si $det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DE}) = 0$

On calcule $det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DE}) = \begin{vmatrix}7+1 & 0-4\\ -1-3 & 4-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}8 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix} = 8\times 2 - 4\times 4 = 16 - 16 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires. Donc les (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 39 :

Pour chaque droite tracée sur le graphique ci-dessous, déterminer son équation réduite.



L'équation réduite d'une droite est de la forme $y = mx + p$

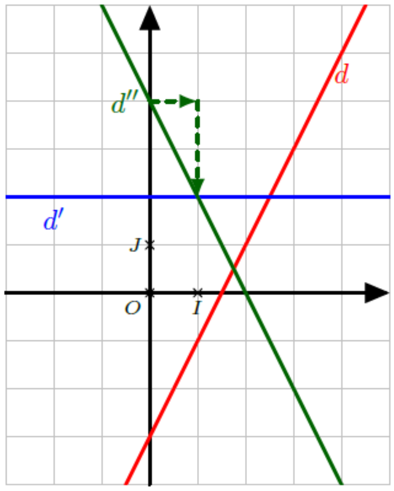
m le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

$(d_1): y = m_1x + p_1$
$m_1 = \frac{3}{-2}$ *et* $p_1 = -2$ *donc* $(d_1): y = -\frac{3}{2}x - 2$

$(d_2): y = m_2x + p_2$
$m_2 = \frac{-1}{1} = -1$ *et* $p_2 = 5$ *donc* $(d_2): y = -x + 5$
$(d_3): y = m_3x + p_3$
$m_3 = 0$ *et* $p_3 = -3$ *donc* $(d_3): y = -3$
$(d_4): y = m_4x + p_4$
$m_4 = \frac{5}{1} = 5$ *et* $p_4 = 0$ *donc* $(d_4): y = 5x$
$(d_5): x = k$: (d_5)est parallèle à l'axe des ordonnées.
donc $(d_5): x = 3$
$(d_6): y = m_6x + p_6$
$m_6 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ *et* $p_6 = 4$ *donc* $(d_6): y = \frac{2}{3}x + 4$

Exercice 40 :

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.
On se place dans un repère $(O; I; J)$.
Soit Δ la droite d'équation $y = 5x + 3$.



1) FAUX
$y_C = 7$ *et* $5 \times x_C + 3 = 5 \times (-2) + 3 = -10 + 3 = -7$
$y_C \neq -7$ donc C n'appartient pas à la droite Δ

2) FAUX
Δ' *et* Δ ont des coefficients directeurs différents donc les droites sont sécantes.
Le coefficient directeur de Δ est 5 et celui de Δ' est 3.

3) VRAI
$5x_D + 3 = 5 \times (-2.5) + 3 = -\frac{19}{2} = -9.5 = y_D$ donc D appartient à la droite Δ.
$3x_D - 2 = 3 \times (-2.5) - 2 = -\frac{19}{2} = -9.5 = y_D$ donc D appartient à la droite Δ'.
Ainsi le point D $(-2{,}5 ; -9{,}5)$ appartient aux deux droites Δ et Δ'.

4) FAUX
$(d): y = mx + p$
$m = \frac{4}{2} = 2$ *et* $p = -3$ *donc* $(d): y = 2x - 3$

5) VRAI
$(d'): y = m'x + p'$
$m' = 0$ *et* $p' = 2$ *donc* $(d'): y = 2$

6) VRAI
$(d): y = 2x - 3$ *donc* $m = 2$ .Le coefficient directeur de la droite d est 2.

7) FAUX
$(d'): y = 2$ *donc* $m = 0$.

8) FAUX :
La droite d' ne passe pas par l'origine donc d' n'est pas la représentation graphique d'une fonction linéaire.

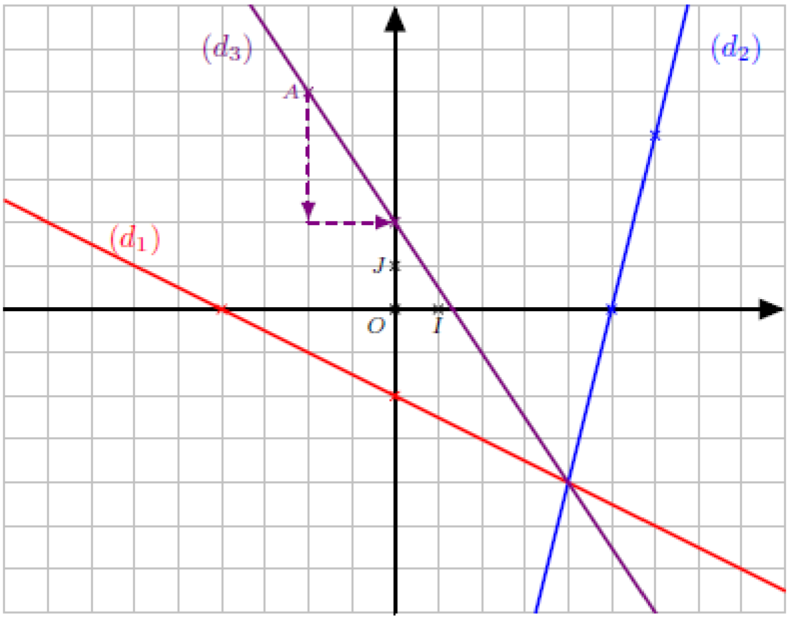
9) VRAIE :les flèches en pointillés permettent de lire graphiquement le coefficient directeur de la droite d''.
10) FAUX
$m = \frac{-2}{1} = -2$
Le coefficient directeur de la droite d'' est égal à -2

Exercice 41 :

Le plan est rapporté à un repère $(O; I; J)$.
1) Les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $(d_1) : y = -0{,}5x - 2$ et $(d_2) : y = 4x - 20$.

$(d_1) : y = -0{,}5x - 2$		
x	0	-4
y	-2	0

$(d_2) : y = 4x - 20$		
x	5	6
y	0	4



2) a) La droite (d_3) passant par le point $A(-2; 5)$ et de coefficient directeur m $= -\frac{3}{2}$
b) $(d_3): y = m_3x + p_3$
$m_3 = -\frac{3}{2}$ et $p_3 = 2$ donc $(d_3): y = -\frac{3}{2}x + 2$

3) a) (d_1) et (d_2) ont des coefficients directeurs différents. Le coefficient directeur de (d_1) est -0.5 et le coefficient directeur de (d_2) est 4. Elles sont donc sécantes.
b) Les coordonnées de M point d'intersection de (d_1) et (d_2) vérifient à la fois les équations réduites des deux droites.
Donc $y_M = -\frac{1}{2}x_M - 2$ et $y_M = 4x_M - 20$
Ainsi on a le système suivant :

$$\begin{cases} y_M = -\frac{1}{2}x_M - 2 \\ y_M = 4x_M - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -\frac{1}{2}x_M - 2 \\ -\frac{1}{2}x_M - 2 = 4x_M - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -\frac{1}{2}x_M - 2 \\ -\frac{9}{2}x_M = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -\frac{1}{2}x_M - 2 \\ x_M = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = -2 - 2 = -4 \\ x_M = 4 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point M sont $(4 ; -4)$
c) $-\frac{3}{2}x_M + 2 = -\frac{3}{2} \times 4 + 2 = -4 = y_M$
Donc le point M appartient-il à (d_3). Donc les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont concourantes en M.

Exercice 42 :

Dans un repère $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on donne les points $A(-3; 2)$, $B\ (4; 4)$, $C\ (4;\ -2)$ et $D(1;\ -4)$.
1)
La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(7 ; 2)$
Pour tout point $M(x ; y)$ appartenant à la droite (AB), on a :

$\mathrm{M}(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 7 \\ y-2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ 2(x+3) - 7(y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ 2x + 6 - 7y + 14 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ 2x - 7y + 20 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est $2x - 7y + 20 = 0$

La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}(7\,;-4)$
Pour tout point $M(x\,;y)$ appartenant à la droite (AC), on a :

$\mathrm{M}(x\,;y) \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 7 \\ y-2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow\ -4(x+3) - 7(y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow\ -4x - 12 - 7y + 14 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ -4x - 7y + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite (AC) est $-4x - 7y + 2 = 0$

La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}(0\,;-6)$
Elle est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est donc $x = 4$.

2) a) Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des abscisses.
$M(x_M; y_M)$ est sur l'axe des abscisses donc $y_M = 0$
$M(x_M; y_M)$ appartient à la droite (AB) donc $2x_M - 7y_M + 20 = 0$.

Ainsi $\begin{cases} y_M = 0 \\ 2x_M - 7y_M + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 0 \\ 2x_M + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 0 \\ 2x_M = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 0 \\ x_M = -10 \end{cases}$

Donc les coordonnées du point M sont $(-10\,;0)$

Soit $M(x_M; y_M)$ le point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des ordonnées.
$M(x_M; y_M)$ est sur l'axe des abscisses donc $x_M = 0$
$M(x_M; y_M)$ appartient à la droite (AB) donc $2x_M - 7y_M + 20 = 0$.

Ainsi $\begin{cases} x_M = 0 \\ 2x_M - 7y_M + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ -7y_M + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ -7y_M = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y = \frac{20}{7} \end{cases}$

Donc les coordonnées du point M sont $(0\,;\frac{20}{7})$

b) Soit $M(x_M; 5)$ le point d'intersection de la droite (AB)
$M(x_M; 5)$ appartient à la droite (AB) donc $2x_M - 7 \times 5 + 20 = 0$.
Ainsi $2x_M - 7 \times 5 + 20 = 0 \Leftrightarrow 2x_M - 15 = 0 \Leftrightarrow x_M = \frac{15}{2}$

Donc les coordonnées du point M sont $(\frac{15}{2}\,;5)$

3) a) On calcule $-4x_D - 7y_D + 2 = -4 \times 1 - 7 \times (-4) + 2 = -4 + 28 + 2 = 26$
Or $26 \neq 0$ donc D n'appartient à la droite (AC)

b) La droite (Δ) passe par D et est parallèle à la droite (AC).
Ainsi un vecteur directeur de (Δ)est $\overrightarrow{AC}(7;-4)$.
Pour tout point $M(x\,;y)$ appartenant à la droite (Δ) on a :

$\mathrm{M}(x\,;y) \in (\Delta) \ \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 7 \\ y+4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -4(x-1) - 7(y+4) = 0$
$\Leftrightarrow\ -4x + 4 - 7y - 28 = 0$
$\Leftrightarrow\ -4x - 7y - 24 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (Δ) est $-4x - 7y - 24 = 0$.
L'équation réduite de la droite (Δ) est $y = -\frac{4}{7}x - \frac{24}{7}$

Exercice 43 :

Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix.

$$\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases} \qquad ** \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ \frac{1}{2}x + 3y = \frac{11}{2} \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 6y = 4 & L_1 \\ 3x + 7y = 8 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 18y = 12 & L_1 \longleftarrow 3 \times L_1 \\ -15x - 35y = -40 & L_2 \longleftarrow -5 \times L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -53y = -28 & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 3x + 7y = 8 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{53} & L_1 \\ 3x + 7 \times y = 8 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{53} & L_1 \\ 3x + 7 \times \frac{28}{53} = 8 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{53} & L_1 \\ 3x = \frac{228}{53} & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{28}{53} & L_1 \\ x = \frac{76}{53} & L_2 \end{cases}$$

Donc le couple solution est $\left(\frac{76}{53}; \frac{28}{53}\right)$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 & L_1 \\ \frac{1}{2}x + 3y = \frac{11}{2} & L_2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ -2x - 12y = -22 & L_2 \longleftarrow -4 \times L_2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ -8y = -16 & L_2 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ y = 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 \times 2 = 6 \\ y = 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ y = 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ -\frac{5}{2}z=\frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases}$$

Donc le triplet solution est $(-1; 2; -3)$

Exercice 44 :

Pour chaque question, seule une réponse parmi celles proposées est exacte, elle est surlignée.

1) À Noël, Robin s'est fait offrir la trilogie des films « Batman » (trois films, sortis en 2005, 2008 et 2012). Il insère au hasard l'un des DVD dans son lecteur. Quel est la probabilité que ce soit le film le plus récent ?

$a)\ \frac{1}{6}$ $\quad b)\ \frac{1}{3}$ $\quad c)\ \frac{1}{2}$ $\quad d)\ \frac{2}{3}$

2) Robin place les trois DVD côte à côte, mais au hasard, sur une étagère. Quelle est la probabilité que les films soient rangés dans l'ordre chronologique de gauche à droite ?

$a)\ \frac{1}{6}$ $\quad b)\ \frac{1}{3}$ $\quad c)\ \frac{1}{2}$ $\quad d)\ \frac{2}{3}$

Il y a 6 façons de ranger les DVD. Une seule façon permet de ranger les DVD dans l'ordre chronologique de gauche à droite

3) On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32. On note A l'événement : « Obtenir au moins un roi ».
L'événement $\bar{A}$ est

a) « Obtenir exactement un roi »
b) « N'obtenir aucun roi » ;
c) « Obtenir au moins une dame »
d) « Obtenir deux rois ».

4) Soient A et B deux événements issus d'une même expérience aléatoire.
Sachant que $P(B)=0.3; P(A\cap B)=0.1$ et $P(A\cup B)=0.5$, on peut dire que la probabilité de l'évènement A est :

$a)$ 0.1 $\quad b)$ 0.2 $\quad c)$ 0.3 $\quad d)$ 0.4

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
Donc $0.5=P(A)+0.3-0.1$
D'où $P(A)=0.5-0.3+0.1=0.3$

5) On lance une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir « Pile » est :

$a)$ 0.25 $\quad b)$ 0.5 $\quad c)$ 0.75 $\quad d)$ 1.

6) On lance 2 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est :

$a)$ 0.25 $\quad b)$ 0.5 $\quad c)$ 0.75 $\quad d)$ 2.

7) On lance 8 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir huit fois « Pile » est :

$a)\ \frac{1}{8}$ $\quad b)\ \frac{1}{4}$ $\quad c)$ environ 0.001 à 10^{-3} près $\quad d)$ environ 0.004 à 10^{-3} près

La probabilité est $\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}\approx 0.004$ à 10^{-3} près

Exercice 45 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants : A : « Tirer un trèfle » et B : « Tirer un roi ».

1) $P(A)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$; $P(B)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$.

2) l'événement $\bar{A}$ puis calculer sa probabilité.

L'évènement $\bar{A}$ est défini par : « ne pas tirer de trèfle » $P(\bar{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

3) a) l'événement $A\cap B$: « tirer le roi de trèfle » et l'évènement $A\cup B$: « tirer un trèfle ou un roi ».

b) $P(A\cap B)=\frac{1}{32}$.

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$.

Exercice 46 :

Une roue de loterie est formée de cinq secteurs. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Secteur	1	2	3	4	5
Probabilité	0.2	0.25	0.1	p_4	p_5

1) On a $1 = 0.2 + 0.25 + 0.1 + p_4 + p_5 = 0.2 + 0.25 + 0.1 + p_4 + 2p_4$
Ainsi $1 = 0.55 + 3p_4 \Leftrightarrow 3p_4 = 0.45 \Leftrightarrow p_4 = 0.15$
Et $p_5 = 2p_4 = 0.3$

2) On lance cette roue puis on attend l'arrêt.

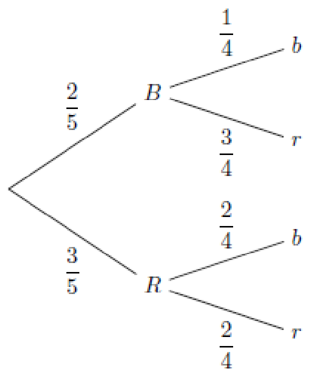
a) La probabilité que la flèche indique un multiple de 2 est $p_2 + p_4 = 0.25 + 0.15 = 0.40$

b) La probabilité que la flèche indique un secteur avec un numéro inférieur ou égal à 3 est $p_1 + p_2 + p_3 = 0.2 + 0.25 + 0.1 = 0.55$

Exercice 47 :

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux bleues « B » et trois rouges « R ».
On dispose également de deux sacs contenant des jetons : l'un est bleu et contient un jeton bleu « b » et trois jetons rouges « r »; l'autre est rouge et contient deux jetons bleus « b » et deux jetons rouges « r ».
On extrait une boule de l'urne puis on tire un jeton dans le sac qui est de la même couleur que la boule tirée.

1) Cette expérience est représentée par l'arbre pondéré.



2) $P(A) = P(B \cap b) + P(R \cap r) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

La probabilité que la boule et le jeton sont de la même couleur est de $\frac{2}{5}$

Exercice 48 :

Dans un lycée de 1 280 élèves, 300 élèves se font vacciner contre la grippe.
Pendant l'hiver, il y a une épidémie de grippe et 10% des élèves contractent la maladie. De plus, 3% des élèves vaccinés ont la grippe.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
1) On a le tableau ci-dessous :

	Nombre d'élèves ayant eu la grippe	Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe	Total
Nombre d'élèves vaccinés	$3\% \times 300 = 9$	291	300
Nombre d'élèves non vaccinés	119	861	980
Total	$10\% \times 1280 = 128$	1152	1280

2 On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.
Calculer la probabilité des événements suivants :

a) $P(A) = \frac{300}{1280} = \frac{15}{64} \approx 0.234$

b) $P(B) = \frac{128}{1280} = \frac{1}{10} = 0.1$

c) $P(C) = \frac{9}{1280} \approx 0.007$: « L'élève a été vacciné et a eu la grippe ».

3) On choisit au hasard l'un des élèves non vaccinés.
$P(D) = \frac{119}{980} = \frac{17}{140} \approx 0.121$

Exercice 49 :

On donne maintenant le nombre d'essais inscrits par le Castres Olympique au cours de la saison 2018/2019 :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2

1) Le nombre moyen d'essais par match est $\bar{x} = \frac{0\times4+1\times7+2\times9+3\times3+4\times1+5\times2}{4+7+9+3+1+2} = \frac{48}{26} = \frac{24}{13} \approx 1.8$.
En moyenne, le nombre d 'essais inscrits par match est de 1.8

2) On a le tableau suivant :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2
Fréquence en %	$\frac{4}{26} \approx 0.1538$ 15.38%	$\frac{7}{26} \approx 0.2692$ 26.92%	$\frac{9}{26} \approx 0.3462$ 34.62%	$\frac{3}{26} \approx 0.1154$ 11.54%	$\frac{1}{26} \approx 0.0385$ 3.85%	$\frac{2}{26} \approx 0.0769$ 7.69%

3) Pour calculer la médiane et les quartiles, rajoutons au tableau, les effectifs cumulés croissants. On obtient le tableau suivant :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	4	7	9	3	1	2
ECC	4	11	20	23	24	26

L'effectif total de la série est 26. C'est un nombre pair. Donc la médiane est la moyenne du 13ème terme et du 14ème terme de la série.

Ainsi $M_e = \frac{\frac{2+2}{2}4}{2} = 2$. Dans au moins 50% des matchs, il y a eu 2 essais ou plus et dans au moins 50% des matchs, il y a eu 2 essais au moins.

4) Pour déterminer le premier quartile :

$\frac{1}{4} \times 26 = 6.5$ Le premier quartile est donc le 7ème terme de la série. $Q_1 = 1$

Pour déterminer le troisième quartile :

$\frac{3}{4} \times 26 = 19.5$ Le troisième quartile est donc le 20ème terme de la série. $Q_3 = 2$

Exercice 50 :

Dans une entreprise, le salaire mensuel moyen est de 2102 €. L'entreprise annonce qu'elle va reverser une prime de 150 € à tous ses employés le mois prochain.

Le revenu moyen (salaire + prime) sera alors de $2102 + 150 = 2252$ €

Exercice 51 :

Les opérateurs téléphoniques doivent mettre à disposition de leurs clients une offre de service en langue des signes française. Le rapport du 3ème trimestre 2022 de l'ARCEP donne les notes données à ce service par les utilisateurs.

Notes	1	2	3	4	5
Effectif	1239	384	1135	3182	21 909

$$\bar{x} = \frac{1 \times 1239 + 2 \times 384 + 3 \times 1135 + 4 \times 3182 + 5 \times 21\,909}{1239 + 384 + 1135 + 3182 + 21\,909} = \frac{127685}{27849} \approx 4.5849$$

$$V = \frac{1239 \times (1 - 4.5849)^2 + 384 \times (2 - 4.5849)^2 + 1135 \times (3 - 4.5849)^2 + 3182 \times (4 - 4.5849)^2 + 21909 \times (5 - 4.5849)^2}{27849}$$

$V \approx 0.941$

$\sigma = \sqrt{V} \approx 0.97$

2) $\bar{x} - 2\sigma \approx 4.5849 - 2 \times 0.97 \approx 2.6449$

$\bar{x} + 2\sigma \approx 4.5849 + 2 \times 0.97 \approx 6.5249$

Dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma\,; \bar{x} + 2\sigma]$, il y a 26 610 notes soit un pourcentage de $\frac{26610}{27849} \approx 0.9556 \approx 95.56\%$