Le travail proposé est de difficulté raisonnable mais requiert de réfléchir à partir d'un cours de première année maîtrisé. Attention, il n'y a pas forcément unicité de la réponse pour les questionnaires à choix multiples.

Ces exercices couvrent à peu près tout le programme de PCSI en mathématiques et vous permettront de faire vos révisions pendant vos vacances d'été.

Préliminaires :

Exercice 1

Remplir les boites avec l'un des symboles suivants $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

(1) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$
$x = y \quad \square \quad x^2 = y^2$

(2) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$
$x = y \quad \square \quad x^2 = y^2$

(3) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$
$|x| + |y| = 0 \quad \square \quad |x + y| = 0$

(4) Soit $x \in \mathbf{R}$
$x^2 < x \quad \square \quad x < 1$

(5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \square \quad \sum u_n$ converge

(6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \square \quad \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

(7) Soit $f : E \longrightarrow F$ injective
$x = y \quad \square \quad f(x) = f(y)$

(8) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$
$g \circ f$ injective $\quad \square \quad$ f injective

Exercice 2

Notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) Il y a 10^k entiers naturels s'écrivant avec exactement k chiffres en base 10.
(2) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Le cardinal de $[\![n - 1, 2n]\!]$ est $n + 1$.
(3) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Le cardinal de $[\![-n - 1, n]\!]$ est $2n$.
(4) Si x et y sont deux réels strictement positifs, alors $\dfrac{x}{y^2} \leqslant x$.
(5) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Si $(x, y) \in [a, b]^2$ alors $\left|\dfrac{x\cos(x)}{x^2 + y^2}\right| \leqslant \dfrac{a}{2b^2}$.
(6) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Si $(x, y) \in [a, b]^2$ alors $\left|\dfrac{x\cos(x)}{x^2 + y^2}\right| \leqslant \dfrac{b}{2a^2}$.
(7) Une série convergente est absolument convergente.

Question de cours 1 *Complexes*

1. Donner les racines n-ième de l'unité.

2. Donner l'inégalité triangulaire (sous forme d'un encadrement), ainsi que les cas d'égalité.

3. Donner les formules d'Euler et la formule de Moivre.

Exercice 3

Pour chacun des complexes suivants, donnez son module et un argument :

(1) $z = \dfrac{i+1}{i-1}$ (2) $z = e^{i\frac{\pi}{4}} - 1$

(3) $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^{2020}$ (4) $z = 1 + i\tan(\theta)$, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(5) $z = e^{i\frac{\pi}{4}} + i$ (6) $z = \dfrac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1+i}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 + z + 3i = 1$ d'inconnue z.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(z-i)^n = (z+i)^n$ d'inconnue z et de paramètre $n \in \mathbf{N}^*$ fixé.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\theta \in \mathbf{R} \backslash \pi\mathbf{Z}$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \qquad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$$

Exprimez S_n et T_n sans le signe $\sum$.
Calcul de la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours 2 *Suites numériques*

1. Rappeler le théorème de convergence par encadrement.

2. Rappeler le théorème de la limite monotone.

3. Rappeler le théorème des suites adjacentes.

Exercice 7

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ lorsque :

$$u_n = \frac{n^2+5n}{5n^2+\sin(n)+\frac{1}{n^3}} \qquad u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} \qquad u_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{2n^2+k}}$$

Exercice 8

Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbf{R}^2$ et
$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 10

Notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(2) Si $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Question de cours 3 *Intégration*

1. Donner la propriété d'intégration par parties.

2. Donner la propriété du changement de variables.

3. Donner la propriété sur les sommes de Riemann.

Exercice 11

Notez pour chaque égalité, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (2) $\displaystyle\int_0^{2} t^2e^{3t}\mathrm{d}t = \frac{5e^3-2}{27}$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} e^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2$ (4) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x|x|\mathrm{d}x = \frac{20}{3}$

Exercice 12 *Calculs d'intégrales*

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} t\cos(3t)\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^2 \frac{\ln(t^2)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}\mathrm{d}t \qquad I_4 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 13

Soit $f \in C([a,b],\mathbf{R})$ telle que $\forall x \in [a,b], \quad f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$.

Exercice 14

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, en déduire qu'elle converge.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n \neq 0$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

5. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
   On utilisera les trois questions précédentes.
6. Déterminer une constante α, telle que $\forall n \in_n n, \quad (n+1)I_nI_{n+1} = \alpha$.
7. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Que peut-on en déduire pour la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?
8. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n n!^2}.\dfrac{\pi}{2}$.
9. Donner l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 15

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{(nt+1)(1+t^2)}\mathrm{d}t$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n e^{a(1-x)}\mathrm{d}x$ avec $a>0$.

Question de cours 4 *Continuité - Dérivabilité - Développement limités - Équations différentielles*

1. Donnez l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donnez l'énoncé du théorème des accroissements finis.
3. Donnez le développement limité à l'ordre 3 de la fonction tangente en 0.
4. Écrire la forme d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 sur un intervalle I.
5. Écrire la forme d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sur un intervalle I.

Exercice 16

Notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) La fonction $f : x \mapsto x\lfloor x\rfloor$ est continue sur $\mathbf{R}$.

(2) La fonction $x \mapsto x|x|$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

(3) Si f est une fonction réelle de classe C^n qui s'annule en $n+1$ points distincts d'un intervalle I alors sa dérivée $n^{\text{ième}}$ s'annule au moins une fois sur I.

(4) La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est solution de l'équation différentielle $y''+xy'+y=0$ sur $\mathbf{R}$.

(5)La fonction $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est la seule solution de l'équation différentielle $y''+xy'+y=0$ sur $\mathbf{R}$.

(6) Le solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y''-y=0$ sont de la forme $x\mapsto a\mathrm{ch}(x)+b\mathrm{sh}(x)$ avec a et b réels.

(7) Le solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y'=ixy$ sont de la forme $x\mapsto ae^{i\frac{x^2}{2}}$ avec a réel.

Exercice 17

Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + (3-i)y' + (2-i)y = 0$.

Exercice 18

On considère (E) l'équation différentielle : $xy' - y = x^3$.
Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.
Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 19

Déterminer un équivalent simple en 0 de :

$$(1)\quad \frac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3} \qquad (2)\quad \ln(\sin(x)) \qquad (3)\quad \frac{e^{-x}-1}{\sin^2(x)}$$

$$(4)\quad \sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \qquad (5)\quad \frac{\ln(1+x^2}{\sqrt{1+x}} \qquad (6)\quad (1+\tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}}$$

Exercice 20

Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de :

$$(1)\quad \frac{e^{2+x}}{1+x+x^2} \qquad (2)\quad \ln\left(1+\frac{2}{t^4}\right) \qquad (3)\quad e^{x^2+x+1}\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Question de cours 5 *Séries numériques*

Remplir les boites $\boxed{}$ avec l'un des symboles suivants $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$.

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les séries associées $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ $\boxed{}$ $\sum u_n$ converge .

(2) $\sum |u_n|$ converge $\boxed{}$ $\sum u_n$ converge.

(3) $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent $\boxed{}$ $\sum (u_n+v_n)$ converge.

(4) $\sum q^n$ converge $\boxed{}$ $|q| \leqslant 1$

Exercice 21

Déterminer les réels $r \geqslant 0$ tels que la série de terme général $u_n = r^n\left(3+\frac{2}{n}\right)^n$ converge.

Exercice 22

Étudier la convergence de la série de terme général u_n lorsque :

$$u_n = \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^2} \qquad u_n = \frac{4n+1}{1+2n^2} \qquad u_n = \frac{e^{-n}}{1+n^2} \qquad u_n = \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$$

Exercice 23

1. Montrer que pour tout réel x la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$ converge.

   On pose alors $U(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Calculer $U(1)$ puis $U(2)$.
3. Calculer $U(p)$ pour tout entier naturel non nul p.
4. Déterminer la limite de $U(p)$ lorsque p tend vers l'infini.

Question de cours 6 *Polynômes*

1. Donner l'énoncé de la division euclidienne dans $\mathbf{R}[X]$.

2. Donner la définition de polynôme scindé sur $\mathbf{K}$.

3. Donner toutes les façons de dire qu'un complexe a est racine de multiplicité $p \in \mathbf{N}^*$ d'un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$.

4. Donner l'expression de la somme et du produit des racines complexes d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Exercice 24

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{R}$ fixés, déterminer le reste de la division euclidienne de $A_n = (\cos(a) + \sin(a)X)^n$ par $B = X^2 + 1$.

Exercice 25

Déterminer les réels a et b pour que $P_n(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le reste de la division euclidienne de $P_n(X)$ par $(X-2)^2$?

Exercice 26

Notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) Les racines de $P = X^3 - 5X + 2$ sont toutes réelles.
(2) $P = X^3 + 4X^2 - 51X + 90$ admet une racine double.
(3) Les racines complexes de $P = iX^2 - iX - 1 + i$ sont i et $1 + i$.
(4) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, les racines de $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ sont simples.

Exercice 27

Déterminer les entiers naturels n non nuls tels que le polynôme $P = X^2 + X + 1$ divise le polynôme $Q_n = (X+1)^n - X^n$.

Question de cours 7 *Espaces vectoriels - Applications linéaires*

On considère E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

1. Soit $f : E \to F$, à quelle condition dit-on que f est linéaire ?

2. Donner la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

3. Donner l'énoncé du théorème de la base incomplète.

4. Donner l'énoncé du théorème du rang.

Exercice 28

Sans calcul, notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre de $\mathbf{R}^2$, où $u_1 = (-1, 1)$, $u_2 = (1, 3)$ et $u_3 = (4, 2)$.

(2) La famille (P_0, P_1, P_2) est une famille génératrice de $\mathbf{R}_4[X]$, où $P_0 = X^4+X+1$, $P_1 = X^2-X-1$, $P_2 = (X-1)(X+4)+X^3$.

(3) La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille liée de $\mathbf{R}^3$, où $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (2, 0, 1)$, $u_3 = (10, 20, -10)$.

(4) La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$ où $P_0 = 3$, $P_1 = X + 1$, $P_2 = X^2 + X + 2$, $P_3 = X^3 - 4x + 3$.

Exercice 29

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels dont on donnera une base et la dimension :

- $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$. Donner un supplémentaire de E_1 dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
- $E_2 = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbf{N}}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n \right\}$.
- $E_3 = \{y \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad y' - 6y = 0\}$.
- $E_4 = \{y \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}), \quad y'' + y = 0\}$.
- $E_5 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, \quad x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$.
  Donner un supplémentaire de E_5 dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 30

Soit $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ avec $n \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant 2$ et soit $A = X^n = a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbf{R}_n[X]$. On note Φ_A l'application qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de XP par A.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice M de Φ_A dans la base canonique de E.
3. En déduire le rang de Φ_A.
4. Déterminer le noyau et l'image de Φ_A.

Exercice 31

Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation
$x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $Vect((1, -1, 1))$.

Exercice 32

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(a, b) \in_k k^2$ tel que $a \neq b$. Montrer que $Ker(f - aId_E)$ et $Ker(f - bId_E)$ sont en somme directe.

Exercice 33

Montrer que $S_n(\mathbf{R})$ et $A_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices symétriques et antisymétriques, sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Question de cours 8 *Matrices et Déterminants*

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Donner la formule pour le calcul de $det(A)$ par développement par rapport à la j-ième colonne.

2. Donner la formule pour le calcul de $det(A)$ par développement par rapport à la i-ième ligne.

3. Donner le lien entre matrice inversible et déterminant de cette matrice.

4. Donner les propriétés fondamentales du déterminant d'une matrice carrée.

Exercice 34

Déterminer la déterminant et les puissances de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 35

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ est antisymétrique alors A n'est pas inversible.

Exercice 36

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on considère la déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & & & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -2 & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & -2 \\ 0 & & & 0 & & n(n-1) & n \end{vmatrix}$.

Pour $n \geqslant 3$, trouvez une relation de récurrence liant D_n, D_{n-1} et D_{n-2}.

On pose $u_n = \dfrac{D_n}{n!}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n ; En déduire une expression de D_n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 37

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ avec $a_2 \neq 0$. On définit $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. On note $\chi_n(z) = det(zI_n - A_n)$ pour $z \in \mathbf{C}$. Calculer $\chi_2(z)$ et $\chi_3(z)$.

2. Montrer que $\forall z \in \mathbf{C}, \quad \chi_n(z) = z^{n-2}(z^2 - a_1 z - B_n)$ avec $B_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k^2$.

Question de cours 9 *Espaces euclidiens*

On note E un espace euclidien.

1. Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le cas d'égalité.

2. Donner l'énoncé du théorème de Pythagore.

3. Dans un espace euclidien, donner la définition de la distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel V.

Exercice 38

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \quad (f(x)|x) = 0$.
Montrer que $\forall (x,y) \in E^2 \quad (f(x)|y) = -(x|f(y))$.
Montrer que $Ker(f) = (Im(f))^{\perp}$.

Exercice 39

Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(\quad | \quad)$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la borne inférieure de $\left\{ \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x, \quad (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Question de cours 10 *Probabilités*

On considère un univers fini Ω muni d'une probabilité P.

1. Donner la formule de la probabilité de la réunion de deux événements.

2. Quand dit-on que deux événements sont indépendants ?

   Soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans un ensemble fini E.

3. Donner la définition de l'espérance de X.

4. Quand dit-on que X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$?
   Dans ce cas, donner la valeur de son espérance.

5. Quand dit-on que X suit une loi de Bernoulli ?
   Dans ce cas donner la valeur de son espérance et de sa variance.

6. Donner l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 40

Notez pour chaque assertion, si elle est vraie (V) ou si elle est fausse (F) :

(1) Pour toute variable aléatoire réelle discrète $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

(2) Deux événements disjoints sont indépendants.

(3) La somme de deux variables indépendantes de loi uniforme suit une loi uniforme.

(4) La variance de la somme de deux variables aléatoires est égale à la somme des variances de chacune des variables aléatoires.

Exercice 41

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 42

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{R}$. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\dbinom{n}{k}$.

1. Trouver un lien entre $\dbinom{n}{k}$ et $\dbinom{n+1}{k+1}$.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.