Trigonométrie

Formules d'Euler , fonctions sin, cos et tan:

$\forall\theta \in \mathbb{R}\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ et $\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$.

$\forall\theta \in \mathbb{R}\quad \sin'(\theta) = \cos(\theta)$, $\cos'(\theta) = -\sin(\theta)$; $\forall\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\ \tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.

$\forall\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}\ \frac{1}{\sin^2(\theta)} = \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(\theta)}$.

Résolution d'équations :

$\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = y + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = -y + 2k\pi)$

$\sin(x) = \sin(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = y + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = \pi - y + 2k\pi)$

$\tan(x) = \tan(y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = y + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = y + \pi + 2k\pi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\text{ tq } x = y + k\pi$

Transformation de l'expression acos(x)+bsin(x) :

On peut transformer l'expression $a\cos(x) + b\sin(x)$ en introduisant la forme trigonométrique du complexe $a + ib = \rho e^{i\theta}$, on a $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \rho\cos(\theta)$ et $b = \rho\sin(\theta)$.

$a\cos(x) + b\sin(x) = \rho\cos(\theta)\cos(x) + \rho\sin(\theta)\sin(x) = \rho\cos(x - \theta)$.

Valeurs particulières : nd : " valeur non définie"

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	**0**	-1
$\tan(\theta)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	**nd**	0

Angles complémentaires :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$,

$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-1}{\tan(\theta)}$.

Angles supplémentaires :

$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$, $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$.

$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$, $\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$.

Formules d'addition:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ et $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$

Si $a, b, a + b \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

Angle double :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ $\quad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ posons $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ alors $\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Transformation d'un produit en somme :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$; $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$.

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$.

Transformation d'une somme en produit :

Soient $p, q \in \mathbb{R}$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$; $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p + q}{2}\right)\cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$; $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p + q}{2}\right)\sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$

Formule de Moivre : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $p \in \mathbb{Z}$ alors $e^{ip\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^p$.

Trigonométrie réciproque :

$\left(\theta = \arctan(x), x \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow \left(x = \tan(\theta), \theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\right)$

$\left(\theta = \arccos(x), x \in [-1, 1]\right) \Leftrightarrow \left(x = \cos(\theta), \theta \in [0, \pi]\right)$

$\left(\theta = \arcsin(x), x \in [-1, +1]\right) \Leftrightarrow \left(x = \sin(\theta), \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\right)$

Pour tout $x \in [-1, +1]$ $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Pour tout x non nul, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \varepsilon \dfrac{\pi}{2}$ avec $\varepsilon = +1$ si $x > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $x < 0$.

Nombres complexes

Règles de calcul dans $\mathbb{C}$:

Tout nombre complexe z s'écrit d'une unique façon sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels et $i^2 = -1$. a est la **partie réelle** de z, b sa **partie imaginaire** : $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.
Si la partie réelle de z est nulle, on dit que z est **imaginaire pur**.
Deux complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $z = a + ib$ est non nul et z possède un inverse : $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$.

Conjugué d'un complexe:

Le **conjugué** du complexe $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right)$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}\left(z - \bar{z}\right)$; z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Conjugué d'une somme de complexes : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

Conjugué d'un produit de complexes : $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

Conjugué d'un quotient de complexes : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

Module d'un complexe :

Si $z = a + ib$, le module de z est le réel positif ou nul : $\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
Les complexes $z, -z$ et $\bar{z}$ ont même module.
Pour tout complexe z : $\boxed{|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|}$.
Le module d'un produit de complexes est égal au produit des modules,
le module d'un quotient de complexes est égal au quotient des modules.

Inégalité triangulaire : $\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|}$.

Si $zz' \neq 0$, l'inégalité triangulaire est une **égalité** $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda$ réel > 0 tq $z' = \lambda z$.

Inégalité triangulaire renversée : $\boxed{\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'|}$.

Un complexe z est de module $1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$.

Pour tout complexe z de module 1, il existe un réel θ unique modulo 2π près, tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$.

L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 vérifie :

$1 \in \mathbb{U}$, si $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ alors $zz' \in \mathbb{U}$, si $z \in \mathbb{U}$ alors $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$: $(\mathbb{U}, \times)$ est appelé groupe multiplicatif des complexes de module 1.

Plan complexe :

L'orientation choisie étant celle du sens trigonométrique, on appelle plan complexe $\mathcal{P}$ un plan orienté muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
A tout complexe $z = x + iy$, on associe :

- le point M de $\mathcal{P}$ tq $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que M est l'image du complexe $z = x + iy$ et que z est l'affixe du point M.
- le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Si z est l'affixe de M, alors $|z| = OM$ et si a est l'affixe de A, alors $|z - a| = AM$.

Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - a| = r$ est le cercle de centre A d'affixe a et de rayon r.

<u>Forme trigonométrique d'un complexe non nul :</u>

Soit z un complexe non nul, M son image dans le plan complexe.

L'argument de z noté $\mathrm{Arg}(z)$ est la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$: $\boxed{\mathrm{Arg}(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi] \text{ et } \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]}$.

Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est appelé un argument de z : $\boxed{\arg(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM})\,[2\pi]}$

$\frac{z}{|z|}$ est complexe de module 1 donc il existe un unique réel θ défini modulo 2π près tel que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$: θ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

θ est un argument de z : $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$. $\boxed{z = |z|\,e^{i\arg(z)} \text{ est la forme trigonométrique de } z}$.

- Si z et z' sont des complexes non nuls et si n est un entier naturel :

$\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\,[2\pi]$; $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$; $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\,[2\pi]$

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$.

- Si z et z' sont deux complexes non nuls : $z = z' \Leftrightarrow (|z| = |z'| \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}\ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi)$

<u>Fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $t \mapsto e^{it}$:</u>

$\forall t \in \mathbb{R}\quad e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$; $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2\ e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}$, $\overline{e^{it}} = e^{-it}$, $\frac{e^{it}}{e^{it'}} = e^{i(t-t')}$, $|e^{it}| = 1$

$\boxed{e^{it} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } t = 2k\pi}$; formule de Moivre : $\forall n \in \mathbb{N}\quad \forall t \in \mathbb{R}\ (e^{it})^n = e^{int}$.

Formules d'Euler : $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ et $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)}\right) = 2e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)}\right) = 2ie^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

<u>Fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $z \mapsto e^z$:</u>

Si $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$

e^z est un complexe non nul, de module e^x et $\arg(e^z) \equiv y\,[2\pi]$.

$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) \equiv \mathrm{Im}(z')\,[2\pi])$

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2\quad e^z e^{z'} = e^{z+z'}$, $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{(z-z')}$ et si $n \in \mathbb{N}$ $(e^z)^n = e^{nz}$.

<u>Racines n-ièmes d'un complexe non nul :</u>

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation $z^n = a$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, appelées racines n-ièmes de a.

Si $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$, les racines n-ièmes de a sont les complexes : $\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}}$

où $k \in k \in [\![0, n-1]\!]$ (on peut aussi choisir pour k : n valeurs consécutives entières).

Attention la notation $\sqrt[n]{x}$ est réservée aux réels x positifs ou nuls.

En particulier les racines n-ièmes de 1 sont les complexes $\boxed{\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ où } k \in [\![0, n-1]\!]}$

La somme des n racines n-ièmes d'un complexe non nul est nulle.

Les racines cubiques de 1 sont : $1, j$ et $j^2 = \bar{j}$ où $j = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a $j^3 = 1$.

$\boxed{1 + j + j^2 = 0}$: j et $j^2 = \bar{j}$ sont les racines de l'équation du second degré $1 + t + t^2 = 0$.

Racines carrées du complexe non nul a+ib :

On cherche à déterminer les racines carrées du complexe $a + ib$ (qui existent d'après le paragraphe précédent) sans chercher la forme trigonométrique de $a + ib$.

On cherche $x + iy$ tq $(x + iy)^2 = a + ib$.

Si $x + iy$ est une racine carrée de $a + ib$ alors $(x + iy)^2 = a + ib$ donc :

égalité des modules : $|x + iy|^2 = |a + ib|$ donc $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

égalité des parties réelles et imaginaires : $x^2 - y^2 = a$ et $2xy = b$.

Ces équations permettent de déterminer x^2, y^2 puis les couples (x, y) connaissant le signe de xy.

Equation $az^2+bz+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$:

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, soit δ tel que $\Delta = \delta^2$ (on obtient deux valeurs distinctes si $\Delta \neq 0$)

L'équation admet deux racines (distinctes si $\Delta \neq 0$) : $\boxed{z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}}$

Si $\Delta = 0$ on obtient une racine double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

Si z_1 et z_2 sont racines de $az^2 + bz + c = 0$ où $a \neq 0$, alors $\boxed{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$.

Si l'on connait la somme S et le produit P de deux complexes z et z' alors ces deux complexes z et z' sont les racines de l'équation $t^2 - St + P = 0$.

Polynômes

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition d'un polynôme – opérations usuelles :

- Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne sur 0 c'est-à-dire une suite nulle à partir d'un certain rang.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Le polynôme $P + Q$, somme de P et Q, est défini par : $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le polynôme PQ, produit de P et Q, est défini par : $PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le polynôme $\lambda P + \mu Q$, combinaison linéaire de P et Q, est défini par : $\lambda P + \mu Q = (\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- La formule du Binôme de Newton est valable dans $\mathbb{K}[X]$ (le produit de polynômes est commutatif) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2\ \ (P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}}$

Ecriture d'un polynôme, degré d'un polynôme :

- Soit $a \in \mathbb{K}$, on confond a et le polynôme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par : $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = 0$.

On a dit que a est un polynôme constant.

- $\boxed{\text{On note } X \text{ le polynôme } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ défini par : } a_0 = 0,\ a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2\ a_n = 0}$.

Alors le polynôme produit $X^2 = X \times X$ est le polynôme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$a_0 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$ et $\forall n \geq 3\ a_n = 0$.

Et pour $p \geq 1$: X^p est le polynôme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par : $a_p = 1$ et $\forall n \neq p\ a_n = 0$

donc pour $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ polynôme, on a $\boxed{P = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p X^p}$: dans cette somme seul un nombre fini de termes sont non nuls, donc c'est une somme finie.

On appelle degré de P le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ avec la convention que $\boxed{\deg(0) = -\infty}$.

Pour montrer que $\omega = \deg(P)$, il faut montrer que l'on peut écrire $P = \sum_{p=0}^{\omega} a_p X^p$ avec $a_\omega \neq 0$.

a_ω s'appelle **le coefficient dominant** du polynôme P.

- Pour $a \neq 0$ $\deg(a) = 0$, $\deg(0) = -\infty$; $\deg(X) = 1$; $\forall p \geq 1$ $\deg\left(X^p\right) = p$.
- Soient P et Q deux polynômes :

$\boxed{\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) ;\ \deg(\lambda P) \leq \deg(P) \text{ avec égalité pour } \lambda \neq 0 ;\ \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \text{ avec égalité si } \deg(P) \neq \deg(Q).}$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X] = \{$polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tq $\deg(P) \leq n\}$.

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Il est de dimension finie $n+1$: $\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ est une base dite canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. $\boxed{PQ = 0 \Leftrightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)}$

Polynôme dérivé – formule de Leibniz – formule de Taylor :

On définit le **polynôme dérivé** du polynôme $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ par $P' = \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i X^{i-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1) a_{i+1} X^i$.

Si $P = a \in \mathbb{K}$ est un polynôme constant, alors P'=polynôme nul.

Si P n'est pas un polynôme constant, alors $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Donc pour tout P on a : $\boxed{\deg(P') \leq \deg(P) - 1}$.

On définit par récurrence le polynôme dérivé n-ième de P noté $P^{(n)}$ par : $P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$ avec la convention que $P^{(0)} = P$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(X^n\right)' = nX^{n-1}$, $\left(X^n\right)'' = n(n-1)X^{n-2}$ $\boxed{\text{pour } p < n : \left(X^n\right)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p}}$, $\left(X^n\right)^{(n)} = n!$

et pour $p > n$ $\left(X^n\right)^{(p)} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non nul.

Si $n > \deg(P)$, alors $P^{(n)}$=polynôme nul ; si $n \leq \deg(P)$, alors $\deg\left(P^{(n)}\right) = \deg P - n$

$\boxed{\text{Si } n = \deg(P), \text{ alors } P^{(n)} = n![P]_n}$ où $[P]_n$ désigne le coeffcient dominant de P.

De façon générale on peut écrire : $\boxed{\deg\left(P^{(n)}\right) \leq \deg(P) - n}$

Formule de Leibniz : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \ (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}}$

Formule de Taylor : $\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ soit } a \in \mathbb{K}, \text{ soit } P \in \mathbb{K}_n[X], \text{ alors } P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k}$.

Division euclidienne – racine d'un polynôme :

- Théorème de la division euclidienne :

$\boxed{\forall A \in \mathbb{K}[X] \ \forall B \in \mathbb{K}[X] \text{ avec } B \neq 0 \ \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tq } A = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B)}$.

- On dit que $a \in \mathbb{K}$ est **racine** de $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(a) = 0$.

$\boxed{a \text{ est racine de } P \Leftrightarrow (X - a) \text{ divise } P}$.

- Si P est un polynôme non nul de degré p, P admet au plus p racines distinctes.
- Si P polynôme admet une infinité de racines alors P est le polynôme nul.
- Théorème de D'Alembert-Gauss :

$\boxed{\text{Tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ de degré } \geq 1 \text{ admet au moins une racine dans } \mathbb{C}}$.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P admet m racines distinctes : $a_1, \ldots, a_m$ alors $\prod_{i=1}^{m} (X - a_i)$ divise P.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $a \in \mathbb{C}$ est racine de P dans $\mathbb{C}$ alors $\bar{a}$ est également racine de P dans $\mathbb{C}$.

- On dit que $a \in \mathbb{K}$ est **racine d'ordre** $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de $P \in \mathbb{K}[X]$ s'il $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = (X - a)^\alpha Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

$a \in \mathbb{K}$ racine d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^*$ de P de degré ≥ 1 dans $\mathbb{K}[X]$

$\Leftrightarrow \left(P(a) = 0 = P'(a) = \cdots = P^{(\alpha-1)}(a) \text{ et } P^{(\alpha)}(a) \neq 0\right)$

Factorisation – polynôme scindé:

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ se factorise sous la forme : $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{\alpha_i}$: tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{R}[X]$ se factorise sous la forme :

$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} \left(X^2 + b_j X + c_j\right)^{\beta_j}$ avec les polynômes de degré 2 sans racines réelles.

Soit $P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{\alpha_i}$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, soit ω son degré, on a :

$\deg(P) = \omega = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ et le coefficient dominant de P est λ.

Relations coefficients-racines :

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - t_k) \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ et admet $t_1, \ldots, t_n$ comme racines, une racine étant comptée autant de fois que le veut son ordre de multiplicité, alors :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} t_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} t_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}}$$

Suites réelles ou complexes

Notions de base sur les suites réelles et complexes :

- Une **suite réelle** est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mapsto u(n) = u_n$.
  La suite u est notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une **suite réelle définie à partir d'un rang** n_0 est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.
  L'ensemble des suites réelles est notée : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq u_n \leq M$.
  $\boxed{\text{La suite réelle } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq A}$.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
  La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq :
  $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)}$
  S'il existe un tel $\ell \in \mathbb{R}$ alors celui est **unique**, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, ℓ s'appelle la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
  Dans le cas contraire, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **divergente**.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 $\Leftrightarrow$ la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.
  Réciproque fausse cf la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers $+\infty$** si $\boxed{\forall A > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)}$.

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers $-\infty$** si la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers $-\infty$** si $\boxed{\forall B < 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B)}$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

- Toute suite réelle convergente est bornée.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n \leq v_n$

  Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.

  Le passage à la limite dans une inégalité stricte conduit à une inégalité large.

- Une **suite complexe** est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$, $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mapsto u(n) = u_n$

  Une **suite complexe définie à partir d'un rang** n_0 est notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

  L'ensemble des suites complexes est notée : $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si l'ensemble $\{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La suite complexe } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leq A}$

Attention pas de notions de suite majorée, minorée, croissante, décroissante, monotone pour les suites complexes.

- La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tq:

$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)}$.

S'il existe un tel $\ell \in \mathbb{C}$ alors celui est **unique**, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, ℓ s'appelle la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Dans le cas contraire, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **divergente**.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- La suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 $\Leftrightarrow$ la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si la suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors la suite réelle $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$. Réciproque fausse.

Attention pas de notions de divergence vers $+\infty$,$-\infty$ pour les suites complexes.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ la suite $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Im}(\ell)$.
- Toute suite complexe convergente est bornée.

- On appelle **suite extraite** de la suite **réelle ou complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une **application strictement croissante** de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

  remarque : une telle fonction φ vérifie alors : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \varphi(n) \geq n$.

  exemples de suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}, (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Théorèmes d'existence de limites :</u>

- Suite extraite d'une suite réelle ou complexe convergente :

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle ou complexe** convergente : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

  Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.
- Suite extraite d'une suite réelle divergente vers $+\infty$ ou $-\infty$:

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle** divergente vers $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

  Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle** divergente vers $-\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

  Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$: $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = -\infty$

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

  Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Image d'une suite par une fonction :

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$.

  Soit a élément de I ou extrémité de I. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

  Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors pour toute suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\left(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in I \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a\right)$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
- Soient I intervalle de $\mathbb{R}$ et $a\in I$. Soit f une fonction **continue** sur I: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

  Pour toute suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\left(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \in I \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a\right)$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.
- Opérations sur les suites réelles :

  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **réelles**, soient $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

  On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$. Alors :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\ell$.

  Si de plus $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.
- Opérations sur les suites complexes :

  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites **complexes**, soient $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$ soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

  On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$. Alors :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\ell$.

  Si de plus $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.
- Théorème des gendarmes :

  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq w_n \leq v_n$

  Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers $\ell \in \mathbb{R}$

  alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

  $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n| \leq |u_n|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$ alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes.

  Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Théorème de la limite monotone pour les suites réelles : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle monotone**.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge vers $\ell = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
  - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.
- Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

- Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.
  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ supposée croissante. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $\boxed{\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2 \ u_n \le \ell \le v_p}$.

Suites arithmétiques – suites géométriques – suites arithmético-géométriques :

- Une suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + r}$. Le réel r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Une suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un complexe r tel que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n + r}$. Le complexe r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_n = u_0 + nr}$
- rappel : $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$
- Une suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = qu_n}$. Le réel q s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Une suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** s'il existe un complexe q tel que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = qu_n}$. Le complexe q s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_n = u_0 q^n}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de **raison** $q \neq 1$ alors $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} u_n = u_0 \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique complexe non nulle de raison $q\in\mathbb{C}$.
  $\boxed{\text{Si } |q|<1 \text{ alors la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.
  Si $q=1$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc converge vers u_0.
  Sinon, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Une suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe un couple de réels (a,b) tel que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b}$
- Une suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **arithmético-géométrique** s'il existe un couple de complexes (a,b) tel que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b}$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1} = au_n + b$
  Si $a=1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, si $b=0$ elle est géométrique.

Si $a\neq 1$ et $b\neq 0$ on résout en c : $c = ac + b$ et on pose $\forall n\in\mathbb{N}\ v_n = u_n - c$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

☺ démonstration : $\forall n\in\mathbb{N}\ v_{n+1} = u_{n+1} - c = au_n + b - (ac+b) = a(u_n - c) = av_n$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

- Une suite **réelle** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ tel que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$
  Une suite **complexe** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ tel que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$
- Pour l'étude d'une telle suite on introduit **l'équation caractéristique** : $\boxed{r^2 - ar - b = 0}$.
  $\boxed{\text{Soit } \Delta \text{ son discriminant}}$.
- Cas complexe : $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$
  - Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2 et $\boxed{\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n = \lambda r_1^{\,n} + \mu r_2^{\,n}}$.
  - Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet une racine double complexe r_0 et $\boxed{\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tq } \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n = r_0^{\,n}(\lambda n + \mu)}$

- Cas réel : $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
  - Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et $\boxed{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^{\,n} + \mu r_2^{\,n}}$
  - Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet une racine double réelle r_0 et $\boxed{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r_0^{\,n} (\lambda n + \mu)}$
  - Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ admet deux racines complexes conjuguées que l'on écrit sous forme trigonométrique : $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\boxed{\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n \left(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\right)}$
  - On détermine les valeurs de λ et μ avec les valeurs initiales de la suite : u_0 et u_1.

<u>Eléments pour l'étude d'une suite définie par une récurrence :</u> $u_{n+1} = f(u_n)$

- Soit f une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f : $f(I) \subset I$.
  On appelle point fixe de f sur I tout réel x de I tel que $f(x) = x$.
  En pratique, pour déterminer les intervalles stables par une fonction f définie sur une partie E de $\mathbb{R}$, on cherchera les points fixes de f sur E et on dressera un tableau de variations de f sur E en y faisant figurer les points fixes trouvés.
  $\boxed{a \in I \text{ étant donné, on peut définir la suite récurrente par : } u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)}$
- Si f est une fonction croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
  Si f est une fonction décroissante sur I, alors les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.
- Si la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus converge vers ℓ, si ℓ est un point de I et si f est continue en ℓ, alors ℓ est point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

<u>Relations de comparaison entre suites :</u>

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques : réelles ou complexes.
  On suppose que les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang n_0. La suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ est donc bien définie. On dit que :
  - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ est bornée : $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq M|v_n|}$. On note : $u_n = O(v_n)$ (grand O)
  - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0 : $\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \geq n_0 \text{ tq } (n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|)}$. On note : $u_n = o(v_n)$ (petit o)
  - $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow$ $u_n = O(1)$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 $\Leftrightarrow$ $u_n = o(1)$.
- Relations de comparaison entre suites classiques :
  Soient α, β, γ trois réels tels que : $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 1$.
  $\boxed{(\ln n)^\alpha = o\left(n^\beta\right) \ , \ (n)^\beta = o\left(\gamma^n\right) \text{ et } \left(\gamma^n\right) = o(n\,!)}$.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques : réelles ou complexes.
  On suppose que les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulent pas à partir d'un certain rang n_0.
  On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $(u_n/v_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 1.
- Caractérisation de l'équivalence à l'aide de la différence : $\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)}$.

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites dont les termes ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$.

  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites dont les termes ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. $(u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n) \Rightarrow u_n \sim w_n$
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes telles que $u_n \sim v_n$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et à partir d'un certain rang u_n et v_n sont de même signe.

- Opérations sur les équivalents :
  Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites dont les termes ne s'annulent pas à partir d'un certain rang telles que : $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$.
  Alors : $u_n w_n \sim v_n t_n$, $u_n/w_n \sim v_n/t_n$, $\forall p \in \mathbb{Z}\ u_n^p \sim v_n^p$, $|u_n| \sim |v_n|$.

Attention : pas de sommes d'équivalents, pas de différence, pas de composition.

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques $\boxed{v_n = o(u_n) \Rightarrow u_n + v_n \sim u_n}$.

☺ démonstration :
les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls à partir d'un certain rang n_0.
$v_n = o(u_n)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$. $\forall n \geq n_0$ $\frac{u_n + v_n}{u_n} = 1 + \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ donc $u_n + v_n \sim u_n$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$, alors :

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \ , \ e^{u_n} - 1 \sim u_n \ , \ \sin(u_n) \sim u_n \ , \ \tan(u_n) \sim u_n \ , \ 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Limite d'une fonction

Limite en un point a élément de I ou extrémité de I d'une fonction définie sur l'intervalle I :

I intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ tel que $a\in I$ ou a extrémité de I. $f : I \to \mathbb{R}$. $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0$ tq $\left(x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha] \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: $\forall A > 0\ \exists \alpha > 0$ tq $\left(x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha] \Rightarrow f(x) \geq A\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$: $\forall B < 0\ \exists \alpha > 0$ tq $\left(x \in I \cap [a-\alpha, a+\alpha] \Rightarrow f(x) \leq B\right)$

Limites unilatérales en un point a élément de I ou extrémité de I d'une fonction définie sur l'intervalle I :

I intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ tel que $a\in I$ ou a extrémité de I. $f : I \to \mathbb{R}$. $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$: $f_{/ I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a.
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$: $f_{/ I\cap]a,+\infty[}$ admet ℓ pour limite en a.

Limites en $+\infty$:

I intervalle de $\mathbb{R}$ avec $+\infty$ extrémité de I, $f : I \to \mathbb{R}$. $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$ tq $\left(x \in I \cap [M, +\infty[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\forall A > 0\ \exists M > 0$ tq $\left(x \in I \cap [M, +\infty[\Rightarrow f(x) \geq A\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$: $\forall B < 0\ \exists M > 0$ tq $\left(x \in I \cap [M, +\infty[\Rightarrow f(x) \leq B\right)$

Limites en $-\infty$:

I intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty$ extrémité de I, $f : I \to \mathbb{R}$. $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N < 0$ tq $\left(x \in I \cap]-\infty, N] \Rightarrow |f(x) - \ell| \le \varepsilon\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$: $\forall A > 0\ \exists N < 0$ tq $\left(x \in I \cap]-\infty, N] \Rightarrow f(x) \ge A\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: $\forall B < 0\ \exists N < 00$ tq $\left(x \in I \cap]-\infty, N] \Rightarrow f(x) \le B\right)$

<u>Limite finie en a et fonction bornée au voisinage de a :</u>
$f : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

<u>Limites et inégalités :</u>

- $f, g : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$, $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.
  Si $f(x) \le g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ alors $\ell \le \ell'$
- Théorème d'encadrement dit des gendarmes :
  $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$.
  Si $g(x) \le f(x) \le h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Cas particulier du théorème des gendarmes :
  $f, g : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$.
  Si $|g(x)| \le |f(x)|$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.
- Minoration, majoration et limites infinies :
  $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$.
  Si $g(x) \le f(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
  Si $f(x) \le h(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

<u>Composition des limites :</u>
Soit $h : I \to \mathbb{R}$, a point de I ou extrémité de I éventuellement $\pm\infty$.
On suppose que $h(I) \subset J$ intervalle.
Soit $g : J \to \mathbb{R}$, b point de J ou extrémité de J éventuellement $\pm\infty$. $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{t\to b} g(t) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} (goh)(x) = \ell$.

<u>Théorème de la limite monotone pour les fonctions à valeurs réelles :</u>

- Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction **croissante** sur $]a, b[$
  si f est majorée sur $]a, b[$: f admet une limite finie à gauche en b : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  si f est non majorée sur $]a, b[$: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$
  si f est minorée sur $]a, b[$: f admet une limite finie à droite en a : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  si f est non minorée sur $]a, b[$: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$
- Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction **décroissante** sur $]a, b[$
  si f est majorée sur $]a, b[$: f admet une limite finie à droite en a : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  si f est non majorée sur $]a, b[$: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$
  si f est minorée sur $]a, b[$: f admet une limite finie à gauche en b : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$
  si f est non minorée sur $]a, b[$: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application croissante sur I.
  f admet en tout point a **intérieur** à I une limite à droite et une limite à gauche :
  $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Continuité

<u>Continuité en un point :</u>

- $f : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a \in I$: f est **définie** en a.
  f est **continue en a** si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0$ tq $\left(x \in I \cap [a - \alpha, a + \alpha] \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon\right)$
- $f : I \to \mathbb{C}$, $a \in I$. f continue en a $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

- $f,g : I \to \mathbb{K}$ continues en $a\in I$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors : $|f|$, $(\lambda f+\mu g)$ et fg sont continues en a.

  Si de plus la fonction g ne s'annule pas en a alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $a\in I$, $f(I)\subset J$ intervalle, $g : J \to \mathbb{K}$ continue en $f(a)$ alors gof est continue en a.

Continuité sur un intervalle :

- $f : I \to \mathbb{K}$ est continue sur I si f est continue en tout point de I.

  $C^0(I,\mathbb{K})=C(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
- $f : I \to \mathbb{C}$. f continue sur I $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I.
- $f,g : I \to \mathbb{K}$ continues sur I, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors : $|f|$, $(\lambda f+\mu g)$ et fg sont continues sur I.

  Si de plus la fonction g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, $f(I)\subset J$ intervalle, $g : J \to \mathbb{K}$ continue sur J alors gof est continue sur I.
- $f : I \to \mathbb{K}$ continue sur I, $J\subset I$ sous-intervalle de I.

  La restriction de f à J : $f_{/J}$ est continue sur J.

Prolongement par continuité :

- I intervalle de $\mathbb{R}$, a un point ou une extrémité finie de I. $f : I\setminus\{a\} \to \mathbb{K}$.

  Bien noter que f est non définie en a.
  Si f admet une limite finie ℓ en a, on dit que f est prolongeable par continuité en a
  Son prolongement par continuité en a est la fonction $\tilde{f} : x \in I\setminus\{a\} \mapsto f(x)\,;\, a \mapsto \ell$.
  Le prolongement par continuité en a est alors continue en a.
- Si de plus f est continue en tout point de $I\setminus\{a\}$ alors la fonction $\tilde{f} : I\to\mathbb{K}$ est continue sur I.

Image d'un intervalle par une fonction continue à valeurs réelles :

- Une partie D de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in D^2$ avec $x<y$ on a $]x,y[\subset D$
- théorème des valeurs intermédiaires

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$. Soient $a,b\in I$ tq $a<b$.

  Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x\in[a,b]$ tel que $y=f(x)$.
- Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une valeur x telle que f(x)=y ; il peut y en avoir plusieurs. Si de plus f est strictement monotone, donc injective, l'unicité est alors assurée.
- cas particulier important :

  Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I **intervalle** de $\mathbb{R}$.

  Soient a et b éléments de I, $a<b$ tels que $f(a)f(b)<0$

  alors $\exists c\in\,]a,b[$ tel que $f(c)=0$.
- corollaire : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles :

- L'image d'un **segment** par une fonction **continue** à valeurs réelles est un segment.
- Une fonction **continue** sur un **segment** à valeurs réelles est **bornée et atteint ses bornes**

  $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. $\exists(\alpha,\beta)\in[a,b]^2$ tq $f(\alpha)=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $f(\beta)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

  On a : $f([a,b])=\{f(x),\, x\in[a,b]\}=[f(\alpha),f(\beta)]$.

Continuité et stricte monotonie : le théorème de la bijection

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b avec $a<b$ (a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue et strictement monotone** sur I.

Alors f réalise une bijection de I vers $f(I)$=intervalle de bornes $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

C'est-à-dire : l'application $g : I \to f(I)\,;\, x \mapsto f(x)$ est bijective.

De plus : g^{-1} est continue sur $f(I)$ et g^{-1} est strictement monotone et de même sens de variation que f.

Développements limités

Définition d'un développement limité au voisinage de 0:

Soit D partie de $\mathbb{R}$ telle que : il existe α réel>0 tq $]0,\alpha[$ ou $]-\alpha,0[$ ou $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ soit inclus dans D (on peut s'approcher de 0 en restant dans D).

Soit $f: D \to \mathbb{K}$ fonction définie sur D. Soit $n\in\mathbb{N}$.

On dit que f admet **un développement limité d'ordre n au voisinage de 0**, s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tq $\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right)}$; on écrit : f admet un $dl_n(0)$.

Si $f: D \to \mathbb{K}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors celui-ci est unique.

- L'expression polynomiale $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ s'appelle la **partie régulière** du $dl_n(0)$ de f.
- Le terme a_0 est appelé **terme constant** de ce développement limité.

- Si $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$ on pose p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$.

  Le polynôme $a_p x^p$ s'appelle la **partie principale** du développement limité.

  On a $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p}$: f est équivalente en 0 à sa partie principale.

Développement limité et fonction paire et impaire :

Si D est centré en 0 et si f admet un $dl_n(0)$, alors :

a) si f est une fonction paire, la partie régulière du $dl_n(0)$ de f n'a que des puissances paires;

b) si f est une fonction impaire, la partie régulière du $dl_n(0)$ de f n'a que des puissances impaires.

Troncature :

Si f admet un $dl_n(0)$ et $m < n$, alors f admet un $dl_m(0)$.

La partie régulière du $dl_m(0)$ s'obtient à partir de la partie régulière du $dl_n(0)$ en ne conservant que les termes de degré $\leq m$.

Condition suffisante d'existence d'un dl : la formule de **Taylor-Young** :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 ou ayant 0 comme extrémité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe C^n sur I.

Alors: $\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^p + \underset{0}{o}\left(x^n\right)}$: f admet un $dl_n(0)$.

Combinaisons linéaires et produits avec des développements limités :

Soient $f, g: D \to \mathbb{K}$ admettant chacune un $dl_n(0)$ de parties régulières respectives P et Q.

$f(x) = P(x) + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$ et $g(x) = Q(x) + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$. Alors :

- $f+g$ admet un $dl_n(0)$ dont la partie régulière est $P+Q$.
- $\lambda f, \lambda \in \mathbb{K}$ admet un $dl_n(0)$ de partie régulière λP.

fg admet un $dl_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue à partir de PQ en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

Composition avec des développements limités :

Soit D partie de $\mathbb{R}$ telle que : il existe α réel>0 tq $]0,\alpha[$ ou $]-\alpha,0[$ ou $]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$ soit inclus dans D.

Soit D' une partie de $\mathbb{R}$ de la même forme que la partie D.

Soit $f: D \to \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset D'$ avec $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$ et soit $g: D' \to \mathbb{K}$.

Si f admet un $dl_n(0)$ de partie régulière P et si g admet un $dl_n(0)$ de partie régulière Q, alors gof admet un $dl_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue à partir de $Q(P(X))$ en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

$f(x) = P(x) + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} P(x) = 0$ et $g(u) = Q(u) + \underset{0}{o}\left(u^n\right)$

alors $g\circ f(x) = \left(\text{termes degré} \leq n \text{ dans } Q(P(x))\right) + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$

Quotient avec des développements limités :

Soient $f, g : D \to \mathbb{K}$ telles que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0}$.

Si f et g admettent un $dl_n(0)$ alors $\frac{f}{g}$ admet un $dl_n(0)$.

Méthode pour calculer le développement limité de $\frac{1}{g}$:

$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$ avec $a_0 \neq 0$.

Mettre a_0 en facteur dans le $dl_n(0)$ de $g(x)$ puis composer avec le $dl_n(0)$ de $\frac{1}{1+u}$:

$$\boxed{\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \ldots + (-1)^n u^n + \underset{0}{o}\left(u^n\right)}.$$

Intégration d'un développement limité :

Soit f une fonction **continue** sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et admettant un $dl_n(0)$.

$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right)}$. Soit F une **primitive** de f sur I.

F admet un $dl_{n+1}(0)$: $\boxed{F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{0}{o}\left(x^{n+1}\right)}$.

Développements limités usuels à connaître par cœur :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right) \;;\; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n}\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n} + \underset{0}{o}\left(x^n\right)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \;;\; \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}\left(x^3\right).$$

Développement limité au voisinage de a réel non nul :

Soit a réel non nul.

Soit D partie de $\mathbb{R}$ telle que : il existe α réel>0 tq $]a, a+\alpha[$ ou $]a-\alpha, a[$ ou $]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$ soit inclus dans D (on peut s'approcher de a en restant dans D).

Soit $f : D \to \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, et on note f admet un $dl_n(a)$, s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que $\boxed{f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right)}$.

Soit $\boxed{H = \{x - a, x \in D\}}$. Soit $\boxed{g : H \to \mathbb{K} \;;\; t \mapsto f(t+a)}$

Pour déterminer un $dl_n(a)$ de f on se ramènera en 0 et on cherchera un $dl_n(0)$ de g.

Développement limité au voisinage de l'infini :

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ tq il existe $A > 0$: $]A, +\infty[\subset D$ (on peut s'approcher de $+\infty$ en restant dans D). Soit $f : D \to \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$, et on note f admet un $dl_n(+\infty)$, s'il existe des scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que :

$$\boxed{f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)}\ .$$

Soit $\boxed{G = \left\{\frac{1}{x}, x \in D\right\}}$ et soit $\boxed{g : G \to \mathbb{K}\ ; t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)}$

Pour déterminer un $dl_n(+\infty)$ de la fonction f, on se ramène en 0 et on détermine un $dl_n(0)$ de la fonction g.

Dérivation

Dérivée en un point :

$f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles et $a \in I$.

- f est dérivable au point a si la fonction taux d'accroissement définie sur $I \setminus \{a\}$

$\boxed{\tau_a : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ admet une limite finie quand x tend vers a,

si elle existe, cette limite est notée $f'(a)$: nombre dérivée de f en a.

- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.
- $\boxed{f \text{ dérivable en } a \Rightarrow f \text{ continue en } a}$ .Réciproque fausse.
- Si f est continue en a :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow f \text{ admet un } dl_1(a) \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}\ f(x) = f(a) + d(x-a) + \underset{a}{o}(x-a)}$$

et alors $d = f'(a)$.

- Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse a d'équation $\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$
- Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en un point a :

$f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en a, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $\boxed{(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)}$
- fg est dérivable en a et $\boxed{(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)}$
- si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}}$

- Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a et $\boxed{(gof)'(a) = g'(f(a))f'(a)}$
- Dérivation de la réciproque :

$f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I strictement monotone sur I et dérivable en a.

Alors $\boxed{f^{-1} : f(I) \to I \text{ est dérivable en } f(a) \Leftrightarrow f'(a) \neq 0}$ et alors on a $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}}$

Dérivée sur un intervalle :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Fonction dérivée de f sur I : $f' : I \to \mathbb{R}\ ; x \mapsto f'(x)$.

- Opérations algébriques sur les fonctions dérivables sur un intervalle I :

$f, g : I \to \mathbb{R}$ fonctions dérivables sur I, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
- fg est dérivable sur I et $((fg)' = f'g + fg'$
- si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$

- Si f est dérivable sur I et g dérivable sur $f(I)$ alors gof est dérivable sur I et $\boxed{(gof)' = (g'of)f'}$

- Dérivation de la réciproque :

$f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I strictement monotone sur I et dérivable sur I.

$f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en sur $f(I)$ $\Leftrightarrow$ f' ne s'annule pas sur I et alors

on a $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' o f^{-1}}}$

Extremum local :

- $f : I \to \mathbb{R}$ admet un **minimum local en** $c \in I$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$\forall x \in I \cap [c - \alpha, c + \alpha]$ $f(x) \geq f(c)$

La valeur $f(c)$ est alors appelée minimum local de f.

- $f : I \to \mathbb{R}$ admet un **maximum local en** $c \in I$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$\forall x \in I \cap [c - \alpha, c + \alpha]$ $f(x) \leq f(c)$

La valeur $f(c)$ est alors appelée maximum local de f.

- $f(c)$ est un **extremum local** de f s'il est minimum local ou maximum local.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction dérivable sur $]a, b[$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ admet un extremum local en } c \in]a, b[\text{ alors } f'(c) = 0}$.

Attention réciproque fausse : $x \mapsto x^3$.

Théorème de Rolle :

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$

alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Accroissements finis et conséquences :

- Egalité des accroissements finis :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$, alors :

$\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$\exists c$ tq la pente de la tangente à C_f au point d'abscisse c soit égale à la pente de la corde joignant les points de C_f d'abscisses a et b.

- Inégalité des accroissements finis :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ telle que f' bornée sur $]a, b[$:

$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in]a, b[$ $m \leq f'(x) \leq M$. Alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I tel que $\boxed{\exists M \geq 0\ \forall x \in I\ |f'(x)| \leq M}$ alors

$\boxed{\forall (x, y) \in I^2\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|}$: f est lipschitzienne de rapport M sur I.

- Dérivée et monotonie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle.

f est **constante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$ $f'(x) = 0$

f est **croissante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$ $f'(x) \geq 0$; f est **décroissante** sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$ $f'(x) \leq 0$

- Dérivée et stricte monotonie :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I intervalle.

Si f' est de signe constant sur I et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement monotone sur I.

- Théorème de la limite de la dérivée : condition suffisante de dérivabilité en une borne.

▪ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b]$.

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$: f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

▪ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $[a, b[$.

Si $\lim\limits_{x \to b^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = \ell$: f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$.

Dérivées d'ordres supérieurs - Fonctions de classe C^p – fonctions de classe C^∞ :

- $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$.

  Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est de classe C^1 sur I et $f'(a) = \ell$.

- f est deux fois dérivable en $a \in I$, si f' est dérivable en a, c'est-à-dire

si f' est définie sur un intervalle contenant a et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.

On pose $(f')'(a) = f''(a)$

Attention, il ne suffit pas de connaître $f'(a)$ pour calculer $f''(a)$, il faut connaître $f'(x)$ pour x au voisinage de a et déterminer la limite du taux d'accroissement de f' en a.

- f est deux fois dérivable sur I si f est deux fois dérivable en tout point de I.
- $f : I \to \mathbb{R}$, p entier naturel supérieur ou égal à 2.
  f est p fois dérivable sur I si la dérivée $(p-1)$ ième de f est dérivable sur I.
  f est p fois dérivable sur I si f' est $(p-1)$ fois dérivable sur I.
- La dérivée p ième de f est notée $f^{(p)}$. $f^{(p)} = (f')^{(p-1)} = \left(f^{(p-1)}\right)'$. Par convention $f^{(0)} = f$.
- f est **de classe** C^p **sur** I si f est p fois dérivable sur I et $f^{(p)}$ continue sur I.
  f est **de classe** C^∞ **sur** I si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ f est de classe C^k sur I.
- On note pour tout $k \geq 1$: $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.
  $C^\infty(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.
- si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont p fois dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et λf sont p fois dérivables sur I et $\boxed{(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}}$ et $\boxed{(\lambda f)^{(p)} = \lambda\left(f^{(p)}\right)}$

  si f est C^p sur I et g est C^p sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est de classe C^p sur I.
- Formule de Leibniz :

$f, g : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I, $n \in \mathbb{N}$, alors fg est de classe C^n sur I et :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}.$$

- Si f est de classe C^p sur I et si $\forall x \in I$ $f(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe C^p sur I.

Intégration d'une fonction continue sur un segment

Intégrale des fonctions continues sur un segment :

- Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie d'éléments de $[a, b]$: $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$

strictement croissante avec $a_0 = a, a_n = b$: $\boxed{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b}$.

- $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier sur le segment** $[a, b]$, s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ de $[a, b]$ telle que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in]a_k, a_{k+1}[$ $\varphi(x) = \lambda_k$

σ est appelée subdivision adaptée à φ ou subdivision subordonnée à φ.

- Intégrale sur $[a, b]$ de la fonction φ en escalier sur $[a, b]$: $\boxed{\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\lambda_k}$.

- Approximation des fonctions continues sur un segment par les fonctions en escalier :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction **continue** sur le segment $[a, b]$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ et ψ fonctions **en escalier** sur $[a, b]$ telles que :

$\boxed{\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b] \ |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon}$.

- Intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$:

$$\left\{\int_{[a,b]} \varphi, \ \varphi \text{ fonction en escalier sur } [a, b] \text{ telle que } \forall x \in [a, b] \ \varphi(x) \leq f(x)\right\}$$

= l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f sur $[a, b]$

et $\left\{\displaystyle\int_{[a,b]} \psi, \ \psi \text{ fonction en escalier sur } [a, b] \text{ telle que } \forall x \in [a, b] \ f(x) \leq \psi(x)\right\}$

= l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui majorent f sur $[a, b]$

admettent respectivement **une borne supérieure** et **une borne inférieure**. Ces bornes sont égales.

$\boxed{\text{Leur valeur commune est l'intégrale de } f \text{ sur } [a, b] : \displaystyle\int_{[a,b]} f}$.

- Soit I segment de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ fonction continue sur I. Soit $(a, b) \in I^2$.

On note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$ le réel suivant :

$$\blacksquare \text{ si } a < b : \int_a^b f = \int_{[a,b]} f \quad \blacksquare \text{ si } a = b : \int_a^b f = 0 \quad \blacksquare \text{ si } a > b : \int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$$

Bien remarquer que dans la notation $\int_{[a,b]} f$, $[a, b]$ est un segment donc : $a < b$.

<u>Propriétés de l'intégrale d'une fonction continues sur un segment :</u>

- $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Linéarité : $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$; Positivité : $f \geq 0$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$;

Croissance : $f \leq g$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

- $\boxed{\left(f : [a, b] \to \mathbb{R}^+ \text{ continue positive tq } \int_{[a,b]} f = 0\right) \Rightarrow \forall x \in [a, b]\ f(x) = 0}$.

- Relation de Chasles : I segment de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, $\forall (a, b, c) \in I^3$: $\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$.

- Valeur absolue d'une intégrale : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ $\boxed{\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|}$

- Sommes de Riemann : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonction continue sur le segment $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Les sommes de Riemann de f sur $[a, b]$ sont les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)}.$$

S_n = l'intégrale d'une fonction en escalier associée à la subdivision régulière de $[a, b]$:

$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0, n]\!]$ et prenant la valeur $f(a_k)$ sur l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$.

T_n = l'intégrale d'une fonction en escalier associée à la subdivision régulière de $[a, b]$:

$a_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0, n]\!]$ et prenant la valeur $f(a_{k+1})$ sur l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f} \text{ et } \boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f}$$

<u>Intégration et dérivation :</u>

- Soient $g, G : I \to \mathbb{R}$. G est une primitive de g sur I si G est dérivable sur I et $\forall x \in I\ G'(x) = g(x)$. Deux primitives de g sur I diffèrent d'une constante.
- Intégrale fonction de sa borne supérieure : théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ fonction continue sur I intervalle, soit $a \in I$.

La fonction $\boxed{F_a : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,dt}$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

$\boxed{F_a \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I\ F_a'(x) = f(x)}$.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, soit $(a, b) \in I^2$, soit $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur I.

$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I, soit $(a, b) \in I^2$ alors $\boxed{\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)}$.

- Intégration par parties :

Soient u et v fonctions de classe C^1 sur I intervalle, soit $(a, b) \in I^2$.

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt}$$

- Théorème de changement de variable :

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I, soit $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ continue sur $\varphi(I)$.

$\boxed{\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt}$. Changement de variable en $t = \varphi(u)$.

- Formule de Taylor avec reste intégral d'ordre p au point a :

Soient $p \in \mathbb{N}$, f de classe C^{p+1} sur I intervalle, $a \in I$, alors :

$\boxed{\forall x \in I \ f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, dt}$.

- Primitives usuelles à connaître :

Intervalle d'étude I	Fonction f dont on cherche une primitive.	Une primitive F de f sur I
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = e^x$	$x \mapsto F(x) = e^x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \mathrm{ch}x$	$x \mapsto F(x) = \mathrm{sh}x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \mathrm{sh}x$	$x \mapsto F(x) = \mathrm{ch}x$
$]0, +\infty[$	$x \mapsto f(x) = \ln x$	$x \mapsto F(x) = x\ln x - x$
$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$	$x \mapsto F(x) = \ln(\lvert x\rvert)$
$\begin{cases}]0, +\infty[\text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ \mathbb{R} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}, \\ ]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[\text{ pour } \alpha \in \mathbb{Z}^{*-} \setminus \{-1\} \end{cases}$	$x \mapsto f(x) = x^\alpha$	$x \mapsto F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$x \mapsto F(x) = -\frac{1}{x}$
I tq u dérivable sur I	$x \mapsto f(x) = u'(x)\, e^{u(x)}$	$x \mapsto F(x) = e^{u(x)}$
I tq $\forall x \in I \quad u(x) \neq 0$	$x \mapsto f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	$x \mapsto F(x) = \ln(\lvert u(x)\rvert)$
$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$	$x \mapsto F(x) = -\ln(\lvert\cos x\rvert)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \mathrm{th}x$	$x \mapsto F(x) = \ln(\mathrm{ch}x)$
$]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x\ln x}$	$x \mapsto F(x) = \ln(\lvert\ln(x)\rvert)$
I tq $\forall x \in I \quad u(x) > 0$	$x \mapsto f(x) = u'(x)(u(x))^\alpha$	$x \mapsto F(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \cos x$	$x \mapsto F(x) = \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \sin x$	$x \mapsto F(x) = -\cos x$
$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$x \mapsto F(x) = \tan x$
$J_k =]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto f(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$	$x \mapsto F(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$
$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$	$x \mapsto F(x) = \ln\left(\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert\right)$
$J_k =]k\pi, (k+1)\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$	$x \mapsto F(x) = \ln\left(\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert\right)$
$]-1, +1[$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto F(x) = \arcsin(x)$
$]-1, +1[$	$x \mapsto f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto F(x) = \arccos(x)$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto F(x) = \arctan(x)$