1 Algèbre linéaire

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne et rapporté à sa base canonique (orthonormée) notée (e_1, e_2, e_3).

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).
   (d) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (e) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.
   (f) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$
   (on convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$).
   (g) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (h) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (i) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $B = S - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$
   (c) Comparer avec le résultat de la question 3).

4. L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que $u \circ s = s \circ u = f$.

2. Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 de la question 2) de la première partie.
   (a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale.
   (b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base.
   (c) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S'.
   (d) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
   (e) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?

3. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ stable par composition.
   (b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
      i. Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?
      ii. Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3). Montrer que M commute avec $(S')^3$.
      iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
   (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?

2 Analyse

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations : une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est continue sur I.

PARTIE I

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.
   (a)
      i. Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
      ii. En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.
   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.

      Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.

2. Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$(1) \qquad \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$. On définit S_n sur $[0,\pi]$ par : $S_n(t) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2kt)$.

   (a)

   i. Montrer, *sans récurrence*, que :

   $$(2) \qquad \forall t \in \,]0,\pi[\,, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

   ii. Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.

   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

PARTIE II

1.

   (a) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.

   (a)

   i. Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

   On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

   ii. Comparer $F\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ et I_n.

   (b)

   i. Soit x réel, $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x) tel que : $(2n+1)\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\dfrac{\pi}{2}$.

   On note $\alpha(x) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

ii. Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

3.

(a) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que : $\displaystyle\left|\int_{x}^{y} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).

(b) En déduire que : $\forall x > 0, \quad |\ell - F(x)| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

PARTIE III

1.

(a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \int_{0}^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}.$$

(α et β sont désormais ainsi fixés).

(b) En déduire que $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_{0}^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) S_n\left(\frac{t}{2}\right) dt$ est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

(c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par : $h(t) = \dfrac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2. On définit les suites $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $(n \geqslant 1)$ et $\displaystyle v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geqslant 0)$.

(a) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner sa limite.

(b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.